

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Β' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 19 / 3 / 2023

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι για το πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

A2. Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο A ;

A3. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;

A4. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

« $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ »

Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως αληθή ή ψευδή αιτιολογώντας την απάντησή σας.

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
- β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον y' .
- γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lambda$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\lambda$.

Μονάδες 7 – 4 – 4 – 4 – 6

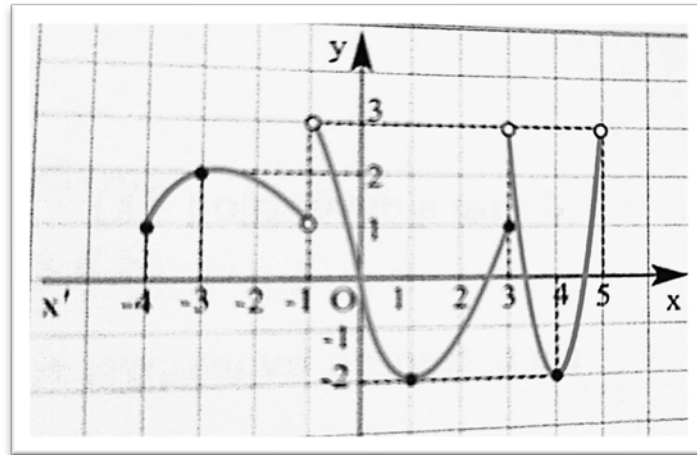
ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{2\sqrt{x^2 + 3} - 4}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$.

- α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- β) Να υπολογίσετε, αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 3f(x) - 4}{f^2(x) - 1}$.

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

B2. Δίνεται η γραφική παράσταση της g



Να βρείτε :

α) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα επόμενα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow -4} g(x)$ iv) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε το πλήθος ριζών των παρακάτω εξισώσεων

i) $g(x) = 2$ ii) $g(x) = 1$ iii) $g(x) = -\sqrt{2}$.

Μονάδες 7 – 5 – 2 – 8 – 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 10x + 2\alpha}{x^3 + \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 8$.

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

Γ3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f δεν βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 1$.

Γ4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{1}{2 \ln x + 1}$.

Μονάδες 4 – 6 – 8 – 7

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : [-1,1] \rightarrow [0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει :

$$f^2(x) + g^2(x) - 2f(x) \cdot \sqrt{1-x^2} - 2g(x) \cdot \sqrt{1-|x|} = x^2 + |x| - 2, x \in [-1,1].$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{1-|x|}$.

Δ2. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $h(x) = \sqrt{1+|x|}$.

Αν δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} ώστε να είναι ίσες.

Δ3. α) Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της $C_f, M(x, f(x))$, απέχει από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ απόσταση ίση με 1 μονάδα.

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωριού που περικλείεται από την C_f και τον άξονα x' .

Δ4. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου :

$$\lim_{x \rightarrow \ln \lambda} \frac{x+5}{f(x)}$$

Μονάδες 6 – 7 – 7(2-3-2) – 5