ΜΕΡΟΣ Α'

Α1.)

I.) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ } το όριο ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ.

II.) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

III.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, αφού από (II) ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και $f(x)<0$ κοντά στο $x_0=0$.

IV.) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$

V.) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{f(x)}$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ αφού $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

VI.) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ αφού $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 1$.

VII.) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = +\infty$ (τα και δύο πλευρικά πάνε στο $+\infty$).

VIII.) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

IX.) $\lim\limits_{x\to 0} \left[f(x)\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right] = 0$

αφού

$\left|f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right| \le |f(x)|$

$-|f(x)| \le f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x} \le |f(x)|$

$\lim\limits_{x\to 0}(-|f(x)|) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(|f(x)|) = 0$

Άρα, από Κ.Π. $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) = 0$

A2.) I.) Σ
II.) Λ
III.) Λ
IV.) Σ
V.) Σ

A3.) I.) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+\eta\mu x}-3}{\sqrt{x+1}-1} = ;$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{9+\eta\mu x}-3)(\sqrt{9+\eta\mu x}+3)(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)\cdot(\sqrt{9+\eta\mu x}+3)\cdot(\sqrt{x+1}+1)} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{9+\eta\mu x}^2-3^2)\cdot(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}^2-1^2)\cdot(\sqrt{9+\eta\mu x}+3)}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x\,(\sqrt{x+1}+1)}{x\cdot(\sqrt{9+\eta\mu x}+3)} = \frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{9}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

II.) $\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 4x\cdot \eta\mu 25x}{(10x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 4x\cdot\eta\mu 25x}{100x^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu 4x\cdot \eta\mu 25x}{4x\cdot 25x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\eta\mu 4x}{4x}\cdot\frac{\eta\mu 25x}{25x}\right] = 1\cdot 1 = 1.$

ΘΕΜΑ Β.

Β1) I.) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x^2}\cdot(1-x)\right]$

$= (+\infty)\cdot 1 = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$ με $x^2>0$ κοντά στο $x_0=0$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+}(1-x) = 1$

II.) $\lim_{x\to 1}\frac{3x-4}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}\cdot(3x-4)\right] = (+\infty)\cdot(-1) = -\infty$

$\lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ με $(x-1)^2>0$ κοντά στο $x_0=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

$\lim_{x\to 1}(3x-4) = 3-4 = -1$

III.) $\lim_{x\to 4}\frac{|x+3|-5}{x^2-16} \underset{\text{κοντά στο } 4}{\overset{x+3>0}{=}} \lim_{x\to 4}\frac{x+3-5}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x\to 4}\left[\frac{1}{x-4}\cdot\frac{x-2}{x+4}\right]$

$\lim_{x\to 4}(x-4) = 0$, με $\lim_{x\to 4^-}\frac{1}{x-4} = -\infty$

και $\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{x-4} = +\infty$

και $\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x+4} = \frac{1}{4}$, άρα $\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 4^-}\left[\frac{1}{x-4}\cdot\frac{x-2}{x+4}\right] = (-\infty)\cdot\frac{1}{4} = -\infty\\ &\lim_{x\to 4^+}\left[\frac{1}{x-4}\cdot\frac{x-2}{x+4}\right] = (+\infty)\cdot\frac{1}{4} = +\infty\end{aligned}\right\}$

Συνεπώς, το όριο δεν υπάρχει.

B2.) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\lambda x^2+\lambda^2x-3}{x+\sqrt{x}-x\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\lambda x^2+\lambda^2x-3}{x(1-\sqrt{x})-1(1-\sqrt{x})} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\lambda x^2+\lambda^2x-3}{(1-\sqrt{x})(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\lambda x^2+\lambda^2x-3}{(1-\sqrt{x})(\sqrt{x}^2-1^2)} =$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\lambda x^2+\lambda^2x-3}{-(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\dfrac{2\lambda x^2+\lambda^2x-3}{-\sqrt{x}-1}\right]$

$= (+\infty)\cdot\dfrac{2\lambda+\lambda^2-3}{-2} = (-\infty)\cdot(\lambda^2+2\lambda-3)$

↳ Μελετούμε το πρόσημό του.

$\Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot(-3) = 4+12 = 16$

$\lambda_1,\lambda_2 = \dfrac{-2\pm 4}{2}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$

λ	$-\infty$	-3		1		$+\infty$
$\lambda^2+2\lambda-3$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\lambda\in(-3,1)}$ $(-\infty)\cdot(-) = +\infty$

$\boxed{\lambda\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)}$: $(-\infty)\cdot(+) = -\infty$

$\boxed{\lambda=-3}$: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\dfrac{-6x^2+9x-3}{-\sqrt{x}-1}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\dfrac{\cancel{-}3(2x-1)(x-1)}{\cancel{-}(\sqrt{x}+1)}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\dfrac{\cancel{(\sqrt{x}+1)}\ (2x-1)}{\cancel{(\sqrt{x}+1)}}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}(2x-1)\right]$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}(2x-1)\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}(2x-1)\right] = +\infty$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ.

Για $\lambda=1$: $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\dfrac{2x^2+x-3}{-\sqrt{x}-1}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\dfrac{(x-1)\cdot(2x+3)}{-\sqrt{x}-1}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{(\sqrt{x}-1)^2}\cdot\dfrac{\cancel{(\sqrt{x}+1)}\cdot\cancel{(\sqrt{x}-1)}(2x+3)}{-\cancel{(\sqrt{x}+1)}}\right] = -\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\cdot(2x+3)\right]$

στο 1^- : $+\infty$

στο 1^+ : $-\infty$

το όριο ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ.

B3.) I.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ημx^3}{x^2} \cdot συν\frac{1}{x} + κ, & αν\ x<0 \\ \frac{|x^4-3x-2|-2}{x}, & αν\ x>0 \end{cases}$$

$x^4-3x-2 \xrightarrow[x=0]{για} -2$, άρα αρνητικό κοντά στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x^4-3x-2|-2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^4+3x\cancel{+2}\cancel{-2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(-x^3+3)}{\cancel{x}}$$

$= 3$.

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{ημx^3}{x^2}\cdot συν\frac{1}{x}+κ\right] = \lim_{x\to 0^-}\left[\underbrace{\frac{ημx^3}{x^3}}_{\substack{θέτουμε\\ u=x^3\\ \to 1}} \cdot \underbrace{x\cdot συν\frac{1}{x}}_{\substack{μηδ.\times φραγμένη\\ \to 0}} + κ\right]$$

$= 1\cdot 0 + κ = κ$

Για να υπάρχει το όριο θα πρέπει τα πλευρικά να ταυτίζονται. Συνεπώς, $\boxed{κ=3}$.

II.) $\lim_{x\to 0^-}[f(x)-2f(-x)] = \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{ημx^3}{x^2}\cdot συν\frac{1}{x}+3-2\frac{|x^4-3x-2|-2}{x}\right]$

$\stackrel{I}{=} 3-2\cdot 3 = 3-6 = -3$.

ΜΕΡΟΣ Β'

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.) Ι.) Λ
ΙΙ.) Λ
ΙΙΙ.) Σ
ΙV.) Σ
V.) Λ

Γ2.) Ψ, $P(x) = x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1)\cdot(x^2+2)$

$\Delta < 0 \quad \Delta < 0$

Γ3.) Ι.) $2^{x-1} + 2^{x-2} - 2^{x-3} = 10$

$\frac{1}{2}2^x + \frac{1}{4}2^x - \frac{1}{8}2^x = 10 \ (\cdot 8)$

$4\cdot 2^x + 2\cdot 2^x - 2^x = 80$

$5\cdot 2^x = 80$

$2^x = \frac{80}{5}$

$2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$\boxed{x = 4}$

ΙΙ.) $3\cdot 2^{4x} - 5\cdot 4^x = 2$

$3\cdot(2^{2x})^2 - 5\cdot 2^{2x} - 2 = 0 \overset{\text{θέτουμε}}{\underset{u=2^{2x}}{\Longleftrightarrow}} 3u^2 - 5u - 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 3\cdot(-2)$
$= 25 + 24 = 49$

$u_1, u_2 = \frac{+5 \pm 7}{6}$ → $u_1 = 2$, $\cancel{u_2 = -\frac{1}{3}}$ Απορ.

για $u_1 = 2$

$2^{2x} = 2^1$

$2x = 1$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

III) $e^{2x} - (1+e)e^x + e = 0 \xLeftrightarrow[e^x = u]{\theta \acute{\varepsilon}\tau o \upsilon \mu \varepsilon}$

$u^2 - (1+e)u + e = 0$

$\Delta = (-(1+e))^2 - 4 \cdot 1 \cdot e = 1 + 2e + e^2 - 4e = 1 - 2e + e^2 =$

$= (1-e)^2$

$u_1, u_2 = \dfrac{-(-(1+e)) \pm \sqrt{(1-e)^2}}{2} = \dfrac{1 + e \pm (e-1)}{2}$

$u_1 = \dfrac{\cancel{1} + e + e - \cancel{1}}{2} = \dfrac{2e}{2} = e$

$u_2 = \dfrac{1 + \cancel{e} - \cancel{e} + 1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

• για $u_1 = e$

$e^x = e^1$

$\boxed{x = 1}$

• για $u_2 = 1$

$e^x = e^0$

$\boxed{x = 0}$

ΘΕΜΑ. Δ.

Δ1.) $A = (5^x - 125) \cdot (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

(I.)

Έστω $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, για $x = 2$: $P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 - 6$

$= 8 - 24 + 22 - 6$

$= 0$

Horner για $\rho = 2$:

1	−6	11	−6	$\rho = 2$
↓	2	−8	6	
1	−4	3	$\boxed{0}$	

$(x-2)$: ο παράγοντας

$P(x) = (x-2) \cdot (x^2 - 4x + 3)$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

$x_1, x_2 = \dfrac{+4 \pm 2}{2}$, $x_1 = 3$, $x_2 = 1$

Άρα, $P(x) = (x-2) \cdot (x-1)(x-3)$

Έστω, $5^x - 125 \geq 0$

$5^x \geq 125$

$5^x \geq 5^3$

$x \geq 3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$5^x - 125$		−		−		−	0	+	
$x - 1$		−	0	+		+		+	
$x - 2$		−		−	0	+		+	
$x - 3$		−		−		−	0	+	
A		+	0	−	0	+	0	+	

II.) $B = (e^{-|x|+1} + 1) \cdot (-x^4 + 2x^2 - 1)$

$= (e^{-|x|+1} + 1) \cdot (-1) \cdot ((x^2)^2 - 2x^2 + 1) =$

$= -(e^{-|x|+1} + 1) \cdot (x^2 - 1)^2$

$(+)$ $\quad$ $(+)$ ρίζες -1, $+1$

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$-(e^{-\lvert x\rvert+1}+1)$		−		−		−	
$(x^2-1)^2$		+	0	+	0	+	
B		−	0	−	0	−	

Δ2.) $P(x)=2^{\lambda}\cdot x^3+3x^2-18x+2\cdot 4^{\lambda}-2^{\lambda+1}$

Διέρχεται από το $A(-1,23)$, δηλαδή

$$P(-1)=23$$

$$2^{\lambda}\cdot(-1)^3+3(-1)^2-18\cdot(-1)+2\cdot 4^{\lambda}-2^{\lambda+1}=23$$

$$-2^{\lambda}+3+18+2\cdot 2^{2\lambda}-2\cdot 2^{\lambda}=23$$

$$2\cdot 2^{2\lambda}-3\cdot 2^{\lambda}-2=0 \xLeftrightarrow[2^{\lambda}=u]{\text{Θέτουμε}}$$

$$2\cdot u^2-3u-2=0$$

$\Delta=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25$, $u_1,u_2=\frac{+3\pm 5}{4}$ ↗ $u_1=2$, ↘ $\cancel{u_2=-\frac{1}{2}}$ Απορ.

για $u_1=2 \Leftrightarrow 2^{\lambda}=2^1 \Leftrightarrow \lambda=1$

Δ3.) Λύνουμε

(I.) $f(x)>g(x)$

$$\frac{1}{4}\cdot 4^x+\frac{1}{6}9^x>\frac{5}{2}\cdot 6^{x-1}$$

$$\frac{1}{4}\cdot 4^x+\frac{1}{6}\cdot 9^x>\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 6^x \quad \cdot 12$$

$$\cancel{12}^3\cdot\frac{1}{\cancel{4}}\cdot 4^x+\cancel{12}\cdot\frac{1^2}{\cancel{6}}\cdot 9^x>\cancel{12}\cdot\frac{5}{\cancel{12}}\cdot 6^x$$

$$3\cdot 4^x+2\cdot 9^x>5\cdot 6^x$$

$$3\cdot\frac{4^x}{6^x}+2\frac{9^x}{6^x}>5\frac{\cancel{6^x}}{\cancel{6^x}}$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^x+2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x>5 \xLeftrightarrow[w=\left(\frac{2}{3}\right)^x]{\text{Θέτουμε}}$$

$$3w+2\cdot\frac{1}{w}-5>0$$

$$3w^2+2-5w>0$$

$3w^2-5w+2>0$, $\Delta=(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3=25-24=1$

$w_1,w_2=\frac{+5\pm 1}{6}=$ ↗ $w_1=1$, ↘ $w_2=\frac{2}{3}$

$$3(w-1)\cdot\left(w-\frac{2}{3}\right)>0$$

$$3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right)\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{2}{3}\right)>0$$

Έστω $\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\geq 0$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{2}{3}\geq 0$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x\geq 1$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^x\geq\frac{2}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x\geq\left(\frac{2}{3}\right)^0$ | $\left(\frac{2}{3}\right)^x\geq\left(\frac{2}{3}\right)^1$

$x\leq 0$ | $x\leq 1$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$\left(\frac{2}{3}\right)^x-1$	+	0	−		−
$\left(\frac{2}{3}\right)^x-\frac{2}{3}$	+		+	0	−
P	+	0	−	0	+

(II.) $\begin{rcases}\beta=2\\ \alpha=-1\end{rcases}$ $4^{2x}-3\cdot 4^x+2=0 \xLeftrightarrow[4^x=u]{\text{Θέτουμε}}$

$u^2-3u+2=0$, $\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1$

$u_1,u_2=\frac{+3\pm 1}{2}$ ↗ $u_1=2$, ↘ $u_2=1$

Για $u_1=2$: $4^x=2$, $2^{2x}=2^1$, $2x=1$, $x=\frac{1}{2}$

Για $u_2=1$: $4^x=4^0$, $x=0$.