ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Γ ΛΥΚΗΟΥ
28/1/2023

ΖΗΤΗΜΑ Α

$\boxed{A4}$ 1. Σ 2. Λ 3. Λ 4. Λ 5. Λ

ΖΗΤΗΜΑ Β

$\boxed{B1}$ $(x+1)(x+2) = x^2+3x+2$

$$f'(x) = -\frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{-2x-3}{((x+1)(x+2))^2}$$

x		-2		$-3/2$		-1	
$f'(x)$	+	‖	+	0	−	‖	−
$f(x)$	↗	‖	↗		↘	‖	↘

Τ.Ε $= -4$

$f(-3/2) = -4$

$\boxed{B2}$ • $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$

• $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

f συνεχής κ' ↗ στο $A_1 = (-\infty,-2) \to f(A_1) = (0,+\infty)$

f συνεχής κ' ↗ στο $A_2 = (-2,-\frac{3}{2}] \to f(A_2) = (-\infty,-4]$

f συνεχής κ' ↘ στο $A_3 = [-\frac{3}{2},-1) \to f(A_3) = (-\infty,-4]$

f συνεχής κ' ↘ στο $A_4 = (-1,+\infty) \to f(A_4) = (0,+\infty)$

άρα $f(A) = (-\infty,-4] \cup (0,+\infty)$

$\boxed{B3}$ $\ln 2023 > 0$ άρα $\ln 2023 \in f(A_1)$ κ' $\ln 2023 \in f(A_4)$

άρα η $f(x) = \ln 2023$ έχει 2 τουλ. ρίζες και είναι ακριβώς

αφού η f γν. μονότονη στα A_1 κ' A_4

$\boxed{B4}$ (i) $1 = (x+2)\cdot\alpha + (x+1)\beta$

Για $x=-1$: $\boxed{1=\alpha}$ Για $x=-2$: $1=-\beta \Leftrightarrow \boxed{\beta=-1}$

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x+2}\,dx = [\ln(x+1)]_0^1 - [\ln(x+2)]_0^1$$

$$= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

(ii) $I = \int_0^{\pi/2} f(\eta\mu x)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx \underset{u=\eta\mu x}{=} \int_0^1 f(u)\,du = \ln 4/3$ (1)

$du = \sigma\upsilon\nu x\,dx$

$u_1 = 0 \quad u_2 = \pi/2$

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Γ1 $\lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \lim\limits_{x\to k^-} f(x) \Leftrightarrow k\ln(k^2+1) = \ln(k+1)$

$\Leftrightarrow k\ln(k^2+1) - \ln(k+1) = 0$

▸ Θεωρω, $h(k) = k\ln(k^2+1) - \ln(k+1)$, $k \geq 0$

• $h(0) = 0 = h(1)$

• $h'(k) = \ln(k^2+1) + k\dfrac{2k}{k^2+1} - \dfrac{1}{k+1} = \ln(k^2+1) + \dfrac{2k^2}{k^2+1} - \dfrac{1}{k+1}$

• $h''(k) = \dfrac{2k}{k^2+1} + \dfrac{4k(k^2+1) - 4k^3}{(k^2+1)^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2}$

$= \dfrac{2k}{k^2+1} + \dfrac{4k}{(k^2+1)^2} + \dfrac{1}{(k+1)^2} > 0 \ \forall\, k \geq 0$

Εστω, $\rho_1 < \rho_2 < \rho_2$ με $h(\rho_1) = h(\rho_2) = h(\rho_3) = 0$

θR

$h'(x_1) = 0 = h'(x_2)$

θR

$h''(x_0) = 0$ Ατοπο

Αρα $k=0$ ή $k=1$ μοναδικες λυσεις.

Γ2 $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & -1 < x \leq 1 \\ x\ln(x^2+1), & x > 1 \end{cases}$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x\ln(x^2+1) - \ln 2}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{x^2+1} = \ln 2 + 1$

αρα $\boxed{x_1 = 1}$ κρισιμο σημειο

• Για $x \in (-1, 1)$: $f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$

• Για $x \in (1, +\infty)$: $f'(x) = \left(\ln(x^2+1)x\right)' = \ln(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} > 0$

Άρα, $\boxed{x_1 = 1}$ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΚΡΙΣΙΜΟ ΣΗΜΕΙΟ

$\boxed{\Gamma 3}$ f συνεχής κ' $\uparrow$ στο $A = (-1, +\infty) \to$

$$f(A) = \left(\lim_{x\to -1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

$\boxed{\Gamma 4}$ $f(x^2+3x+4) = f\left(\frac{4}{e^x}\right) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x^2+3x+4 = \frac{4}{e^x}$

$\Leftrightarrow e^x(x^2+3x+4) - 4 = 0 \overset{*}{\Leftrightarrow} K(x) = K(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{x = 0}$

*θεωρώ, $K(x) = e^x(x^2+3x+4) - 4$, $x \in \mathbb{R}$

$K'(x) = e^x(x^2+3x+4) + e^x(2x+3) = e^x(\underbrace{x^2+5x+7}_{\Delta<0}) > 0$

άρα $K \uparrow$ οπότε K "1-1"

$\boxed{\Gamma 5}$ $\int_0^1 (x+1)'\ln(x+1)\,dx = \left[(x+1)\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 1\,dx$

$= 2\ln 2 - [x]_0^1 = 2\ln 2 - 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 · $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x - 6$

· $f''(x) = 12(x^2 - x - 2)$

x		-1		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↗		↘		↗

· $f'(-2) = -14$, $f'(-1) = 8$, $f'(0) = -6$, $f'(2) = -46$

▸ $f'(-2)f'(-1) < 0$ από Θ. Bolzano $\exists\, x_1 \in (-2,-1) : f'(x_1) = 0$

ΚΑΙ ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΣΤΟ $(-2,-1)$ αφού f' ↗

▸ $f'(-1)f'(0) < 0$ από Θ. Bolzano $\exists\, x_2 \in (-1,0) : f'(x_2) = 0$

κ' ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΣΤΟ $(-1,0)$ αφού f' ↘

$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ άρα $\exists\, \xi > 2$ τ.ω. $f'(\xi) > 0$

▸ $f'(x_0)f'(2) < 0$ από Θ. Bolzano $\exists\, x_3 \in (2, \overset{\xi}{x_0}) : f'(x_3) = 0$

κ' ΕΙΝΑΙ ΜΟΝΑΔΙΚΟ ΣΤΟ $(2,\xi)$ αφού f' ↗

x	$-\infty$ $\quad -2 \quad$ x_1	-1 $\quad$ x_2	0 $\quad$ x_3	ξ $\quad$ $+\infty$
x_0	-2	-1	0	ξ
$f'(x_0)$	-14	8	-6	$f'(\xi) > 0$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗
	T.E	TM	T.E	

Από Σύστημα Θ. Bolzano

Δ2 f παρ/μη στο $[x,-1]$ από ΘΜΤ $\exists\, \xi_1 \in (x,-1)$:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(-1) - f(x)}{-1-x} = \frac{8 - f(x)}{-1-x} = \frac{f(x) - 8}{x+1}$$

$$\xi_1 < -1 \underset{x<-1}{\overset{f'\uparrow}{\iff}} f'(\xi_1) < f'(-1) \iff \frac{f(x)-8}{x+1} < 8$$

$\boxed{\Delta 3}$ α)

Απο το $\boxed{\Delta 2}$ εχουμε $\frac{f(x_1)-8}{x_1+1} < 8 \iff$

$\iff f(x_1) - 8 > 8x_1 + 8 \iff f(x_1) > 8x_1 + 16 \iff$

$\iff f(x_1) > 8(\underbrace{x_1+2}_{+}) > 0$ αφου $x_1 \in (-2,-1)$

αρα $f(x_1) > 0$

β) f συνεχης κ' $\searrow$ στο $(-\infty, x_1] \to f(A_1) = [f(x_1), +\infty)$

f συνεχης κ' $\nearrow$ στο $[x_1, x_2] \to f(A_2) = [f(x_1), f(x_2)]$

αρα $f(x_2) > 0$ αφου $f(x_1) > 0$

f συνεχης κ' $\searrow$ στο $[x_2, x_3] \to f(A_3) = [f(x_3), f(x_2)]$

• $2 < x_3 \overset{f\searrow}{\iff} f(2) > f(x_3) \iff -49 > f(x_3)$ Αρα $\underline{f(x_3) < 0}$

f συνεχης κ' $\nearrow$ στο $[x_3, +\infty) \to f(A_4) = [f(x_3), +\infty)$

$0 \notin f(A_1)$, $0 \notin f(A_2)$, $0 \in f(A_3)$ $0 \in f(A_4)$

αρα η εξισωση $f(x) = 0$ εχει ΑΚΡΙΒΩΣ 2 ΡΙΖΕΣ

Αφου f γν. μονοτονη ΣΤΑ A_3 κ' A_4

$\underline{\Delta 4}$ $g'(x) = 2x^4 - 4x^3 - 24x^2 - 12x + 22 =$

$= 2(x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 6x + 11) = 2f(x)$

Απο $\underline{\Delta 3}$ εχουμε το ζητουμενο

$\underline{\Delta 5}$ $I = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx = \int_1^2 \left(x^2 - 2x - 12 - \frac{6}{x} + \frac{11}{x^2}\right)dx$

$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 12 - 6\ln|x| - \frac{11}{x}\right]_1^2 = \dots = \frac{-36\ln 2 - 43}{6}$