

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
28/01/2023

ΖΗΤΗΜΑ Α

- A1. Να αποδείξετε ότι αν για μια συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ ισχύει ότι $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . (7 μονάδες)
- A2. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού ελαχίστου μιας συνάρτησης f στο x_0 . (4 μονάδες)
- A3. Να διατυπώσετε τον κανόνα De l' Hospital για απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. (4 μονάδες)
- A4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος
1. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.
 2. Η ευθεία $x = 5$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 5}$.
 3. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχει υποσύνολο $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της, που να εφαρμόζεται θεώρημα Rolle.
 4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και άρτια στο $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, τότε και η παραγωγός της f' είναι άρτια.
 5. Ισχύει $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^\beta f(x) dx \geq 0$, όπου f μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$.
- (10 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

- B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (7 μονάδες)
- B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης (5 μονάδες)
- B3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \ln 2023$. (5 μονάδες)
- B4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



i) $\int_0^1 f(x)dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$. (5 – 3 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & -1 < x \leq k \\ x \ln(x^2 + 1), & x > k \end{cases}, k \geq 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχουν μόνο δύο τιμές του k για τις οποίες η συνάρτηση είναι συνεχής (7 μονάδες)

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι $k = 1$.

Γ2. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (4 μονάδες)

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών (4 μονάδες)

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 3x + 4) = f\left(\frac{4}{e^x}\right)$ (5 μονάδες)

Γ5. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$. (5 μονάδες)

ΖΗΤΗΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 6x + 11$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $-2 < x_1 < -1 < x_2 < 0 < x_3$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_1 , τοπικό μέγιστο στο x_2 και τοπικό ελάχιστο στο x_3 . (5 μονάδες)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)-8}{x+1} < 8, x \in (-\infty, -1)$. (5 μονάδες)

Δ3.α. Να δείξετε ότι $f(x_1) > 0$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες. (4 – 5 μονάδες)

Δ4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{2}{5}x^5 - x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 22x + 2023$ έχει δύο οριζόντιες εφαπτομένες. (3 μονάδες)

Δ5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$. (3 μονάδες)