23/07/2021

Διαγώνισμα Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

A1 Φυλλάδιο Μωβ, σελίδα 4

A2 Φυλλάδιο Μωβ, σελίδα 5

A3 Φυλλάδιο Κόκκινο, σελίδα 24

A4
1. Λ
2. Λ
3. Σ
4. Λ
5. Λ

Θέμα Β

B1 Αφού $g(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$ τότε $g(f(x)) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}}$ με $f(x) > 0$

& αφού $g(f(x)) = \sqrt{x^2+3}$, τότε:

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{f(x)} = x^2+3 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{12}{x^2+3}}$$ (αφού $x^2+3 \neq 0$)

(B2) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1^2+3 < x_2^2+3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1^2+3} > \frac{1}{x_2^2+3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{12}{x_1^2+3} > \frac{12}{x_2^2+3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Οπότε $f \downarrow$ στο $(0,+\infty)$

(B3) Θέτω $y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

Πρέπει $y>0$, οπότε

$$y^2 = \frac{12}{x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{12}{y^2}$$

Επομένως $\boxed{g(A) = (0,+\infty)}$

(B4) $$\lim_{x\to 1}\frac{\phi(x)-\phi(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{g(f(x))-2}{x-1}-\frac{1}{2}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}-\frac{1}{2}}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2+3}-4-x+1}{2(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x^2+3}-(x+3)}{2(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4\cdot(x^2+3)-(x+3)^2}{2(x-1)^2\cdot(2\sqrt{x^2+3}+(x+3))} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-6x+3}{2(x-1)^2\cdot(2\sqrt{x^2+3}+x+3)} = \lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)^2}}{2\cancel{(x-1)^2}(2\sqrt{x^2+3}+x+3)} =$$

$$= \frac{3}{2\cdot 8} = \frac{3}{16} \in \mathbb{R}$$

Επομένως ϕ παραγωγίσιμη στο 1

Θέμα Γ

Γ1 Για την $f(x)$: Πρέπει $e^{2x}+e^{x}-2\geq 0$

Θέτω $y=e^{x}$ και έχω: $y^2+y-2\geq 0$

$\Delta=1+8=9$

$y_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$

y		-2		1	
y^2+y-2	$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$

Άρα $y\in(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

οπότε $e^{x}\leq -2$ αδύνατη

ή $e^{x}\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 0$

Οπότε $\boxed{A_f=[0,+\infty)}$

Για την $g(x)$: Πρέπει $x>0$ οπότε $\boxed{A_g=(0,+\infty)}$

Για την $h(x)$: Πρέπει $e^{x}+1\neq 0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

οπότε $\boxed{A_h=\mathbb{R}}$

Γ2 $A_\phi=A_{f\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x>0 / \ln x\geq 0\}=$

$=\{x>0 / x\geq 1\}=[1,+\infty)$

και $\phi(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\sqrt{e^{2\ln x}+e^{\ln x}-2}-\lambda\cdot e^{\ln x}=$

$=\sqrt{x^2+x-2}-\lambda x$

Επομένως $\boxed{\phi(x)=\sqrt{x^2+x-2}-\lambda x \quad \text{με} \quad x\geq 1}$

$A_\omega=A_{h\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_h\}=\{x>0 / \underbrace{\ln x\in\mathbb{R}}_{\text{ισχύει}}\}=(0,+\infty)$

και $\omega(x)=(h\circ g)(x)=h(g(x))=\frac{e^{\ln x}-1}{e^{\ln x}+1}=\frac{x-1}{x+1}$

Επομένως $\boxed{\omega(x)=\frac{x-1}{x+1} \quad \text{με} \quad x>0}$

(Γ3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-\lambda x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}-\lambda x\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-\lambda\right)\right]$ (διότι $x>0$)

Μορφή ορίου $(+\infty)\cdot(1-\lambda)$

- Αν $1-\lambda>0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda<1}$ τότε το όριο κάνει $+\infty$
- Αν $1-\lambda<0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda>1}$ τότε το όριο κάνει $-\infty$
- Αν $1-\lambda=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=1}$ τότε το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x-2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x-2}+x\right)}{\sqrt{x^2+x-2}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-2-x^2}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

(Γ4) $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{w(x)} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{\frac{x-1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}\cdot\left[-(x+1)\right] \overset{\text{Μορφή ορίου}}{=} (-\infty)\cdot(-2) = +\infty$

(Γ5) Θέτω $u=\frac{1}{w(x)}$ με $\lim\limits_{x\to1^-}u = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{w(x)} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{x+1}{x-1} =$

με $w(x)=\frac{1}{u}$ $\qquad = \lim\limits_{x\to1^-}\frac{1}{x-1}\cdot(x+1) \overset{\text{Μορφή ορίου}}{=} (-\infty)\cdot2 = -\infty$

Το όριο γίνεται: $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{\eta\mu u}{u} = \lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{u}\cdot\eta\mu u$

Αφού $|\eta\mu u|\le1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{u}\right|\cdot|\eta\mu u|\le\left|\frac{1}{u}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\eta\mu u}{u}\right|\le\left|\frac{1}{u}\right| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\left|\frac{1}{u}\right|\le\frac{\eta\mu u}{u}\le\left|\frac{1}{u}\right|$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \lim\limits_{u\to-\infty}\left[-\left|\frac{1}{u}\right|\right]=0\\ \bullet\ \lim\limits_{u\to-\infty}\left|\frac{1}{u}\right|=0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Κριτήριο Παρεμβολής}} \boxed{\lim_{u\to-\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0}$$

Scanned with CamScanner

Θέμα Δ

Δ1 Για την $f(x)$: Πρέπει $\ln x > 0$ και $x > 0$ και $x^2 > 0$

$\Leftrightarrow x > 1$ $\quad x \neq 0$

Οπότε $A_f = (1, +\infty)$

Για την $g(x)$: $A_g = \mathbb{R}$

$$A_{f\circ g} = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\} = \{x \in \mathbb{R} / e^x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} =$$
$$= (0, +\infty)$$

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(\ln e^x) + \left[\frac{\ln(e^x)^2}{2}\right]^2 =$$
$$= \ln x + \left[\frac{\cancel{2}\ln e^x}{\cancel{2}}\right]^2 =$$
$$= \ln x + x^2$$

Επομένως $\boxed{(f\circ g)(x) = \ln x + x^2 \quad , \quad x > 0}$

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$, $x_1 < x_2$

Τότε $\ln x_1 < \ln x_2$ (1) , $x_1^2 < x_2^2$ (2)

Από (1) + (2) $\Rightarrow \ln x_1 + x_1^2 < \ln x_2 + x_2^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f\circ g)(x_1) < (f\circ g)(x_2)$

Άρα $f\circ g \nearrow$ στο $(0, +\infty)$

Δ2 Για την $h(x)$: Πρέπει $e^{2x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

οπότε $A_h = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και αφού $A_g = \mathbb{R}$

τότε $A_h \neq A_g$ επομένως $h \neq g$

Όμως για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ισχύει:

$$h(x) = e^x \cdot \left[(e^x)^{2-1} + 1\right] \cdot \left[1 - \frac{e^x \cdot (e^x - 1)}{(e^x - 1)(e^x + 1)}\right] =$$

$$= e^x \cdot (e^x+1) \cdot \left[1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right] =$$

$$= e^x \cdot \cancel{(e^x+1)} \cdot \frac{e^x+1-e^x}{\cancel{e^x+1}} =$$

$$= e^x =$$

$$= g(x)$$

Επομένως $\boxed{h(x) = g(x) \quad \text{για} \quad x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)}$

Δ3 $\quad k(x) = (e^x - e)\cdot(3^{5x+1} - 27)\cdot(x^2-4)$ με $A_k = \mathbb{R}$

Πρέπει $\quad k(x) < 0$

- $e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1$
- $3^{5x+1} - 27 > 0 \Leftrightarrow 3^{5x+1} > 3^3 \Leftrightarrow 5x+1 > 3 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5}$
- $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow x > 2$ ή $x < -2$

x		-2		$\frac{2}{5}$		1		2	
$e^x - e$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3^{5x+1} - 27$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$k(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Επομένως η C_k βρίσκεται κάτω από τον $x'x$
για $\boxed{x \in \left(-2, \frac{2}{5}\right) \cup (1,2)}$

(Δ4) $g(x^4-5x^2+4-\ln 3) > \dfrac{x}{x^2+2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow e^{x^4-5x^2+4-\ln 3} > \frac{x}{x^2+2}$$

- Εστω $x<0$, τοτε $e^{x^4-5x^2+4-\ln 3} > 0$

$$\frac{x}{x^2+2} < 0$$

οποτε ισχύει $e^{x^4-5x^2+4-\ln 3} > \dfrac{x}{x^2+2}$ για καθε $x<0$

- Εστω $x=0$, τοτε $e^{4-\ln 3} > 0$ ισχύει

- Εστω $x>0$, τοτε:

$$\ln e^{x^4-5x^2+4-\ln 3} > \ln \frac{x}{x^2+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4-5x^2+4-\ln 3 > \ln x - \ln(x^2+2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+4x^2+4-9x^2+\ln(x^2+2) > \ln x + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2+2)^2-(3x)^2+\ln(x^2+2) > \ln 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2+2)+(x^2+2)^2 > \ln 3x + (3x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f\circ g)(x^2+2) > (f\circ g)(3x)$$

κ' αφού $f\circ g \nearrow$ στο $(0,+\infty)$ τοτε

$$x^2+2>3x \Leftrightarrow x^2-3x+2>0$$

με $\Delta = 1$

κ' $x_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

x	0		1		2	
x^2-3x+2		+	0	−	0	+

αρα $x\in(0,1)\cup(2,+\infty)$

Συνοψίζοντας έχουμε ότι $\boxed{x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)}$