

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 23 / 07 /2021

Θέμα Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

A2. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

A3. Αν $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g:B \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, να ορίσετε τη σύνθεση της f με την g και να γράψετε το πεδίο ορισμού της.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι Σωστές ή με Λ αν είναι Λανθασμένες:

1. Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και ορίζονται οι συνθέσεις $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.
2. Δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες όταν ισχύει $f(x)=g(x)$.
3. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.
4. Η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$ έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής.
5. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

Μονάδες : 5 – 6 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις:

- $g(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{x}}, x>0$ και $g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 3}, x \in \mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{12}{x^2 + 3}$.

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία για $x > 0$.

B3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g .

B4. Αν $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{(g \circ f)(x) - 2}{x-1}, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$, να αποδείξετε ότι η φ είναι παραγωγίσιμη στο

$x_0 = 1$.

Μονάδες : 6 – 6 – 6 – 7

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^x - 2} - \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- $g(x) = \ln x$ και
- $h(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

Γ2. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\varphi = f \circ g$ και $\omega = h \circ g$.

Γ3. Αν $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + x - 2} - \lambda x$, $x \geq 1$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ4. Αν $\omega(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{\omega(x)}$.

Γ5. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\omega(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{\omega(x)}]$.

Μονάδες : 6 – 6 – 5 – 4 – 4

Θέμα Δ

Έστω $f(x) = \ln(\ln x) + \left[\frac{\ln(x^2)}{2}\right]^2$ και $g(x) = e^x$

Δ1. Να ορίσετε τη σύνθεση της g με την f και να βρείτε την μονοτονία της.

Δ2. Έστω $h(x) = e^x \cdot [(e^x)^{\ln e^2 - 1} + 1] \cdot \left[1 - \frac{e^{2x} - e^x}{e^{2x} - 1}\right]$. Να εξετάσετε αν ισχύει $h(x) = g(x)$. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} , στο οποίο ισχύει $h = g$.

Δ3. Έστω $k(x) = [g(x) - e] \cdot (3^{5x+1} - 27) \cdot (x^2 - 4)$. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_k που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x' .

Δ4. Να λυθεί η ανίσωση $g(x^4 - 5x^2 + 4 - \ln 3) > \frac{x}{x^2 + 2}$.

Μονάδες : 7 – 6 – 6 – 6