ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 17/05/2020

ΘΕΜΑ Α

Α1) Θεωρία σελ. 133 σχολικό

Α2) Θεωρία σελ. 94 σχολικό

Α3) 1) Λ 2) Λ 3) Λ 4) Σ 5) Σ

Α4) Λ π.χ. $f(x) = \frac{|x|}{x}$

$|f(x)| = \left|\frac{|x|}{x}\right| = \frac{|x|}{|x|} = 1$ άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

ΘΕΜΑ 2ο

1) $A_f = (-\infty, 3]$, $f(A) = (-\infty, 2]$

2) $\sqrt{f}$: πρέπει $f(x) \geq 0 \iff x \in [-1, 2]$

$x \in [-1, 0]$: $x_1 < x_2 \xRightarrow{f \uparrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \sqrt{f(x_1)} < \sqrt{f(x_2)}$ άρα $\sqrt{f} \uparrow$ στο $[-1, 0]$

$x \in [0, 2]$: $x_1 < x_2 \xRightarrow{f \downarrow} f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \sqrt{f(x_1)} > \sqrt{f(x_2)}$ άρα $\sqrt{f} \downarrow$ στο $[0, 2]$

$\frac{1}{f}$: πρέπει $f(x) \neq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 3]$

$x \in (-\infty, -1)$: $x_1 < x_2 \xRightarrow{f \uparrow} f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$ άρα $\frac{1}{f} \downarrow$ στο $(-\infty, -1)$

ομοίως έχουμε $\frac{1}{f} \downarrow$ στο $(-1, 0]$, $\frac{1}{f}$ στο $[0, 2)$, $\frac{1}{f} \uparrow$ στο $(2, 3]$

$|f|$: $A_{|f|} = A_f$

$x \in (-\infty, -1]$ $x_1 < x_2 \xRightarrow{f \uparrow} f(x_1) < f(x_2) \iff -f(x_1) > -f(x_2)$ άρα $|f| \downarrow$

γιατί $x \in (-\infty, -1]$ $f(x) \leq 0$ άρα $|f(x)| = -f(x)$

$x \in [-1, 2]$ $f(x) \geq 0$ άρα $|f(x)| = f(x)$ άρα $|f(x)| \uparrow$ $[-1, 0]$ και $\downarrow$ στο $[0, 2]$

$x \in [2, 3]$ $f(x) \leq 0$ άρα $|f(x)| = -f(x)$ άρα $|f| \downarrow$

3) $A_{f\circ f} = \{x \in A_f \mid f(x) \in A_f\} = \{x \le +3 \mid f(x) \le +3\} = (-\infty, +3]$

4) Η $-f$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς τον $x'x$

Η $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που είναι πάνω από τον $x'x$ κι από τα συμμετρικά, ως προς τον $x'x$, των τμημάτων της C_f που είναι κάτω από τον $x'x$

5) Πρέπει $-x \le 3 \iff x \ge -3$, η $C_{f(-x)}$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς τον $y'y$

6) i) $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$ κι $f(x)>0$ όταν $x\to 2^-$ άρα $\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{f(x)} = +\infty$

$f(x)<0$ $x\to 2^+$ άρα $\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{f(x)} = -\infty$

ΔΕΝ υπάρχει το όριο

ii) $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$

iii) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

1) Έστω ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 2 τότε $f(x) \le f(2) \iff$

$f(x)-f(2) \le 0 \xrightarrow[x\in(2,4)]{x-2>0} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \le 0 \Rightarrow \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \le 0$

f παραγωγίσιμη στο 2 άρα $f'(2) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \iff f'(2) \le 0$ άτοπο άρα η f δεν έχει μέγιστο στο 2

2) $5<7<9 \iff f(2)<7<f(4)$, f συνεχής στο $[2,4]$ από ΘΕΤ υπάρχει $x_1 \in (2,4)$ τ.ω. $f(x_1)=7$

3) $[2,x_1]$ $\xrightarrow{\text{ΘΜΤ}}$ $f'(x_2) = \frac{f(x_1)-f(2)}{x_1-2} \iff f'(x_2) = \frac{2}{x_1-2} \iff \frac{1}{f'(x_2)} = \frac{x_1-2}{2}$

$[x_1,4]$ $\xrightarrow{\text{ΘΜΤ}}$ $f'(x_3) = \frac{f(4)-f(x_1)}{4-x_1} \iff f'(x_3) = \frac{2}{4-x_1} \iff \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{4-x_1}{2}$

$\frac{1}{f'(x_2)} + \frac{1}{f'(x_3)} = \frac{x_1-2+4-x_1}{2} \iff \frac{f'(x_3)+f'(x_2)}{f'(x_2)f'(x_3)} = \frac{2}{2} \iff f'(x_3)+f'(x_2) = f'(x_2)f'(x_3)$

4) $f'(x) = 4 - \frac{f(x)-1}{x} \iff x f'(x) - 4x + f(x) - 1 = 0 \iff$

$(x f(x) - 2x^2 - x)' = 0$ Έστω $g(x) = x f(x) - 2x^2 - x$ στο $[2,4]$

g συνεχής στο $[2,4]$ ως πράξη συνεχών

$g(2) = 2f(2) - 8 - 2 = 0$

$g(4) = 4f(4) - 32 - 4 = 0$

g παραγ. στο $(2,4)$ ως πράξη παραγ.

$\Longrightarrow$ Rolle $g'(\xi) = 0$

5) $f''(x) > 0$ και f' συνεχής άρα $f' \uparrow$ στο $[2,4]$

$2 < x < 4 \overset{f'\uparrow}{\iff} f'(2) < f'(x) < f'(4) \Longrightarrow f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$

$f([2,4]) = [f(2), f(4)] = [5, 9]$

6) $[2,x] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$

$[x,4] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi_2) = \frac{f(4) - f(x)}{4-x}$

$f'(\xi_1) \le 2 \iff \frac{f(x)-5}{x-2} \le 2 \iff f(x) - 5 \le 2x - 4 \iff f(x) \le 2x+1$

$f'(\xi_2) \le 2 \iff \frac{f(4) - f(x)}{4-x} \le 2 \iff 9 - f(x) \le 8 - 2x \iff f(x) \ge 2x+1$

άρα $f(x) = 2x+1 \quad \forall x \in (2,4)$

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ άρα $f(x) = 2x+1 \quad \forall x \in [2,4]$

$f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$

ΘΕΜΑ Δ

1) $x_1=-1$ τοπικό ακρότατο άρα Θ.F. $f'(-1)=0$

$$xf'(x)+\alpha = f(x)+2x^3 \Leftrightarrow xf'(x)-f(x)=2x^3-\alpha \xLeftrightarrow{:x^2}$$

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{2x^3-\alpha}{x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \left(x^2+\frac{\alpha}{x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x^2+\frac{\alpha}{x}+c_1, & x>0 \\ x^2+\frac{\alpha}{x}+c_2, & x<0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x^3+\alpha+c_1x, & x>0 \\ k, & x=0 \\ x^3+\alpha+c_2x, & x<0 \end{cases}$$

$f'(-1)=0 \Leftrightarrow 3(-1)^2+c_2=0 \Leftrightarrow c_2=-3$

f συνεχής στο 0 άρα $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow k=\alpha$

άρα $f(x) = \begin{cases} x^3+\alpha+c_1x, & x>0 \\ \alpha, & x=0 \\ x^3+\alpha-3x, & x<0 \end{cases}$

f παραγ. στο $\mathbb{R}$ άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow$

$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3+c_1x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-3x}{x} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c_1=-3$

Τελικά $f(x)=x^3-3x+\alpha$

2) $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

x		-1		1	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(A_1)=(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-1)] = (-\infty, 2+\alpha]$

$f(A_2)=[f(1), f(-1)] = [-2+\alpha, 2+\alpha]$

$f(A_3)=[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [-2+\alpha, +\infty)$

$-2<\alpha<2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2>0 \\ -2+\alpha<0 \end{cases}$

άρα $0\in f(A_1)$, $0\in f(A_2)$, $0\in f(A_3)$ τουλάχιστον 3 ρίζες και γν. μονότονη στα A_1, A_2, A_3 άρα ακριβώς 3 ρίζες

f τρίτου βαθμού πολυώνυμο με ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ τότε

$f(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$ άρα

x		ρ_1		ρ_2		ρ_3	
f	$-$		$+$		$-$		$+$

3) $g'(x) = \dfrac{f(x)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$

	ρ_1		ρ_2		ρ_3	
g'	$-$		$+$	$-$		$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$
		Τ.Ε.		Τ.Μ.	Τ.Ε.	

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\alpha x+5}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{\alpha}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$

άρα το $g(\rho_2)$ δεν είναι ολικό μέγιστο

4) α) $A(-1, 2+\alpha)$ $B(1, \alpha-2)$, $\Gamma(0, \alpha)$

$\lambda_{AB} = \dfrac{\alpha-2-2-\alpha}{1+1} = \dfrac{-4}{2} = -2$, $\lambda_{A\Gamma} = \dfrac{\alpha-2-\alpha}{0+1} = -2$ δηλαδή

$\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma} \Longrightarrow A, B, \Gamma$ συνευθειακά

β) $AB: y = -2x+\alpha$ γιατί $y - y_B = \lambda_{AB}(x - x_B)$

$x=0: \; y = \alpha$ $\quad K(0,\alpha)$

$y=0: \; x = \dfrac{\alpha}{2}$ $\quad \Lambda\left(\dfrac{\alpha}{2}, 0\right)$ $\qquad (OK\Lambda) = \dfrac{1}{2}|OK||O\Lambda| = \dfrac{\alpha^2}{4}$

$E(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{4}$, $E'(\alpha) = \dfrac{\alpha}{2}$

	-2		0		2
E'	||	$-$		$+$	||
E	||	$\searrow$		$\nearrow$	||
			Ο.Ε.		

άρα $\alpha = 0$

5) $f(x) = x^3 - 3x$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow y - x_0^3 + 3x_0 = (3x_0^2-3)(x-x_0) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$

$y = (3x_0^2-3)x - 2x_0^3$

<u>άρα</u> $x^3 - 3x = (3x_0^2-3)x - 2x_0^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = 0$

1	0	$-3x_0^2$	$2x_0^3$	x_0
$\downarrow$	x_0	x_0^2	$-2x_0^3$	
1	x_0	$-2x_0^2$	0	

<u>άρα</u> $(x-x_0)(x^2+x_0x-2x_0^2) = 0 \Leftrightarrow$

$x = x_0$ ή $\Delta = x_0^2 + 8x_0^2 = 9x_0^2$

$x = \dfrac{-x_0 \pm 3x_0}{2}$ $\to x_0$, $\to -2x_0 \neq x_0$.

άρα κι άλλο κοινό σημείο το $N(-2x_0, f(-2x_0))$