

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030  
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

### Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

17/05/2020

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Παρακαλούμε πολύ αφού σκανάρετε τις απαντήσεις σας, να μετατρέψετε τα αρχεία σας σε ένα αρχείο pdf και να το στείλετε με email στον καθηγητή σας μέχρι 20:00 το βράδυ της Κυριακής. Διαγωνίσματα που θα σταλούν αργότερα δεν θα διορθωθούν.

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι: «Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  τότε η  $f$  είναι σταθερή στο  $\Delta$ » (7 M)

**A2.** Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο της  $A(x_0, f(x_0))$ . (4M)

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1. Η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2020}{x^2 - 1}$  έχει δύο σημεία στα οποία δεν είναι παραγωγίσιμη
  2. Αν για τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει  $f(x) \geq 0$  τότε η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο
  3. Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  τότε  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
  4. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$ , μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης, είναι διάστημα
  5. Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$
- (10 M)

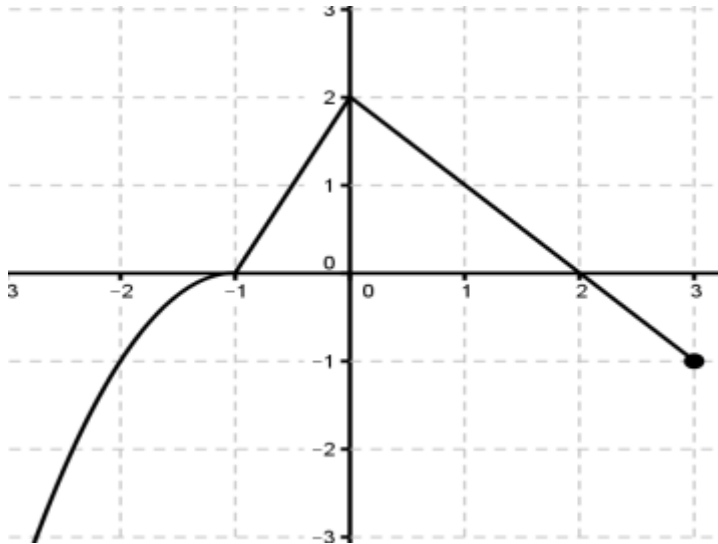
**A4.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός: « Αν για μια συνάρτηση  $f$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = k$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$  ή  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -k$  ». Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή και να δώσετε ένα παράδειγμα που να επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό σας. (1+3 M)

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
 Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030  
 2. ☒ Φανερωμένης 13  
 Χολαργός, ☎ 210 65 36 551  
 www.en-dynamei.gr



### ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .



1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της
2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $\sqrt{f}$ ,  $\frac{1}{f}$ ,  $|f|$  και τη μονοτονία τους.
3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f \circ f$ .
4. Να σχεδιάσετε τις συναρτήσεις  $-f$  και  $|f|$ .
5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $g(x) = f(-x)$  και να τη σχεδιάσετε
6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν

i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$     ii)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$     iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2 – 6 – 6 – 4 – 4 – 3 M)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση  $f$ , παραγωγίσιμη στο  $[2, 4]$  με  $f'(2) > 0$ .

1. Να δείξετε ότι η  $f$  δεν παρουσιάζει μέγιστο στο 2  
 Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι  $f(2) = 5$ ,  $f(4) = 9$ .
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_1 \in (2, 4)$  τέτοιο ώστε  $f(x_1) = 7$ .
3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $x_2, x_3 \in (2, 4)$  τέτοια ώστε  $f'(x_3) + f'(x_2) = f'(x_3) \cdot f'(x_2)$ .
4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f'(x) = 4 - \frac{f(x) - 1}{x}$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(2, 4)$
5. Αν  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in (2, 4)$ , να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .
6. Αν  $f'(x) \leq 2$  για κάθε  $x \in (2, 4)$ , να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2x + 1$ ,  $x \in [2, 4]$

(4 – 4 – 5 – 5 – 4 – 3 M)

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030  
2. ☒ Φανερωμένης 13  
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551  
www.en-dynamei.gr



### ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύει :

- Η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_1 = -1$  τοπικό ακρότατο.
- $xf'(x) + \alpha = f(x) + 2x^3, x \neq 0, \alpha \in (-2, 2)$ .
- $g(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι:  $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$

2. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$  καθώς και το πρόσημο της συνάρτησης  $f$ .

3. Να αποδείξετε ότι η  $g$  έχει δυο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο το οποίο δεν μπορεί να είναι ολικό μέγιστο.

4.α) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι θέσεις τοπικών ακροτάτων της  $f$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$  και  $\Gamma(0, f(0))$  είναι συνευθειακά.

β) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε το εμβαδόν που σχηματίζει η ευθεία  $AB$  με τους άξονες να γίνεται ελάχιστο.

5. Αν  $\alpha = 0$ , να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της  $C_f$  σε οποιοδήποτε σημείο  $M(x_0, f(x_0)), x_0 \neq 0$ , έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο εκτός του  $M$ .

**(5x5 M)**