1. ✉ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ✉ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 12 /4/2020

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει f ΄(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ

Α2. α) Ποια σημεία καλούνται κρίσιμα ;

β) Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής.

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [α,β] και για $x_0 \in [a,\beta]$ παρουσιάζει ακρότατο τότε ισχύει $f'(x_0)=0$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** , αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήστε την απάντηση σας στο ερώτημα **α)**.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f παρουσιάζει ρίζα στο (α, β) και είναι συνεχής στο [α, β] τότε θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

β) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση τότε ισχύει $f(f^{-1}(x))=x$ *όπου* $x\in A$.

γ) Μια συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι γνησίως μονότονη.

δ) Η εφαπτομένη μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $f:(a,\beta)\to\mathbb{R}$ σε ένα σημείο που παρουσιάζει ακρότατο είναι παράλληλη με τον οριζόντιο άξονα.

ε) Το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ αντιστοιχεί πάντα σε διάστημα.

Μονάδες : 5 – 6 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(\mathrm{x})=\begin{cases} a\sqrt{x+1}-1, & x>0 \\ \dfrac{e^x-\beta}{e^x+1}, & x\le 0 \end{cases}$
- Η εφαπτομένη της C_f στο $A(3,\mathrm{f}(3))$ είναι παράλληλη στην ευθεία x-4y=2020

B1. Να αποδείξετε ότι α=β=1.

B2. Να βρείτε την παράγωγο της f και το σύνολο τιμών της.

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(0)\cdot e^x - \frac{1}{x} = 0$ παρουσιάζει ακριβώς μία ρίζα .

B4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφη της f^{-1}.

Μονάδες : 6 – 6 – 6 – 7

Θέμα Γ

Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ισχύουν $x \cdot f'(x) = (x-2)\cdot f(x)$ για κάθε x>0 και $(x-1)(f(x)-e) + g(x)(x-1)^2 \geq 0$ για κάθε x>0.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2}, x > 0$.

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και ακρότατα.

Γ3. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ>0 για την οποία ισχύει $\lambda e^x \geq x^2$ για κάθε $x > 0$.

Γ4. Να βρεθούν οι α, β>0 για τους οποίους ισχύει $3e^{\alpha} + (\alpha\beta)^2 \cdot e^{\frac{1}{\beta}} = (e\alpha)^2$.

Γ5. Σημείο Μ κινείται κατά μήκος της C_f , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης είναι 3 μονάδες/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ κατά τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη της ευθείας $y = -ex + 7$.

Μονάδες : 4 – 2 – 4 – 7 - 8

Θέμα Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $\left(g'(f(x))+1\right)\cdot f'(x) = 2\frac{x^{\ln x}\cdot \ln x}{x}\cdot\left(g'(x^{\ln x})+1\right)$ με $f(1) = 1$ και $g'(x) \geq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = g(x) + x, x > 0$ είναι 1-1.

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = x^{\ln x}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{\ln x}\ln x = 22x$ παρουσιάζει μοναδική ρίζα.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $xf(x) - 1 < (x-1)f(x+1)$ για $x > 1$

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $(x+2020)^{\ln(x+2020)} - x^{\ln x} + 1 = 2021^{\ln 2021}$.

Μονάδες : 2 – 6 – 6 – 5 – 6