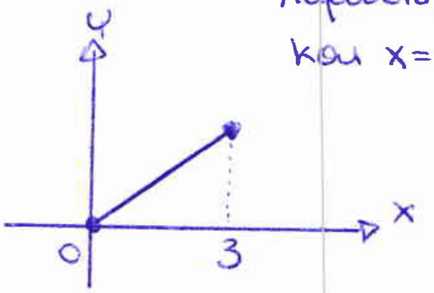
ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (12-4-2020)

A3

Ψευδής, Αντιπαράδειγμα: $f(x)=x,\ x\in[0,3]$

Παρουσιάζει ακρότατα για $x=0$ και $x=3$ όμως $f'(x)=1\neq 0$.



A4

α) ΛΑΘΟΣ, β) ΛΑΘΟΣ, γ) ΛΑΘΟΣ, δ) ΣΩΣΤΟ, ε) ΛΑΘΟΣ

B

B1

$\varepsilon: x-4y=2020 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-505$

$\varepsilon_\varphi \parallel \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon\varphi}=\lambda_\varepsilon \Leftrightarrow f'(3)=\frac{1}{4}$

για $x>0$: $f(x)=\alpha\sqrt{x+1}-1$, $f'(x)=\frac{\alpha}{2\sqrt{x+1}}$, $f'(3)=\frac{\alpha}{4}$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$

Η f συνεχής στο 0: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-\beta}{e^x+1}=\lim_{x\to 0^+}(\alpha\sqrt{x+1}-1)$$

$$\frac{1-\beta}{2}=0 \Leftrightarrow \boxed{\beta=1}$$

B2

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}-1, & x>0\\ \dfrac{e^x-1}{e^x+1}, & x\leq 0\end{cases}$$

Για $x>0$: $f(x)=\sqrt{x+1}-1$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}>0$

Για $x<0$: $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$

②

Για $x=0$:

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{e^x-1}{e^x+1}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{e^x+1}\right) = \frac{1}{2}.$

  ▸ $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^0}{x-0} \xrightarrow[g(x)=e^x]{} \lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$

  και $g'(x)=e^x$ άρα $g'(0)=1$.

- $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}.$

Άρα $f'(0)=1/2$

Έτσι $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, & x>0\\ \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}, & x\le 0\end{cases}$

Ισχύει $f'(x)>0$ για $x\in\mathbb{R}$ και αφού η f συνεχής η $f\nearrow$.

$A=(-\infty,+\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f\nearrow} f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-1,+\infty)$

▸ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1.$

▸ $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-1\right)=+\infty$

B3

$f'(0)e^x-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^x-\frac{1}{x}=0$

Έστω $k(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{x}$, $x\ne 0$.

Για $x<0 \Rightarrow k(x)>0 \Rightarrow$ δεν έχει ρίζες.

Για $x>0 \Rightarrow k(1/2)=\frac{1}{2}\sqrt{e}-2=\frac{\sqrt{e}-4}{2}<0$

$k(1)=\frac{e}{2}-1=\frac{e-2}{2}>0$ $\Big\rangle$ $k(1/2)k(1)<0$

- $K(x)$ συνεχής στο $[\frac{1}{2},1]$ ως πράξεις συνεχών

Από Θ. Bolzano $\exists$ $x_0 \in (1/2, 1)$: $K(x_0)=0$.

$K'(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow K(x) \nearrow$ οπότε x_0 μοναδική ρίζα.

B4

- Από B_2 η $f \nearrow$ άρα και "1-1" (και συνεχής) οπότε υπάρχει αντίστροφη.

- Για $x>0$: $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$

έστω $f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} - 1 \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{x+1}$ άρα $y+1 \geq 0$

$\Leftrightarrow x+1 = (y+1)^2 \Leftrightarrow \boxed{x = y^2+2y}$

$A_1 = (0,+\infty) \xrightarrow[\text{συν}]{f \nearrow} f(A_1) = (0,+\infty) = A_{f^{-1}}$

Άρα $f^{-1}(x) = x^2+2x$, $x>0$

- Για $x \leq 0$: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x+1}$

έστω $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x-1}{e^x+1} = y \Leftrightarrow e^x - 1 = ye^x + y$

$\Leftrightarrow e^x(1-y) = y+1 \xLeftrightarrow{y \neq 1} e^x = \frac{y+1}{1-y}$, $\frac{y+1}{1-y} > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \ln\frac{y+1}{1-y}}$

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

$f^{-1}(y) = \ln\frac{y+1}{1-y}$.

$A_2 = (-\infty, 0] \xrightarrow[\text{συν}]{f \nearrow} f(A_2) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)] = (-1, 0] = A_{f^{-1}}$

Άρα $\boxed{f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2+2x, & x>0 \\ \ln\frac{x+1}{1-x}, & -1 < x \leq 0. \end{cases}}$

Γ

Γ1. Ισχύει $(x-1)(f(x)-e)+g(x)(x-1)^2 \geq 0$

έστω $h(x)=(x-1)(f(x)-e)+g(x)(x-1)^2$ με $x>0$

Τότε $h(x)\geq 0$ με $h(1)=0$

Η h παρ/μη για $x=1$, $h(x)\geq h(1)$ άρα $h(1)$ ελάχιστο

και $x=1$ εσωτ-σημείο του Π.Ο.

Από Θ Fermat $h'(1)=0$

$h'(x)=f(x)-e+(x-1)\cdot f'(x)+g'(x)(x-1)^2+2(x-1)g(x)$

$\xrightarrow{x=1} f(1)-e=0 \Leftrightarrow \boxed{f(1)=e}$

$x\cdot f'(x)=(x-2)f(x) \Leftrightarrow x f'(x)+2f(x)=x\cdot f(x)$

$\xrightarrow{\cdot x} x^2 f'(x)+2x f(x)=x^2 f(x)$

$\Leftrightarrow (f(x)\cdot x^2)'=x^2 f(x)$

οπότε $\exists\, c\in\mathbb{R}: f(x)\cdot x^2=ce^x,\ c\in\mathbb{R}$

$\xrightarrow{x=1} e\cdot 1=c\cdot e \Leftrightarrow c=1$

$\Rightarrow \boxed{f(x)=\dfrac{e^x}{x^2},\ x>0}$

Γ2. $f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^2-2x\cdot e^x}{x^4}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

x	0		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	

ολ. ελάχιστο $f(2)=\dfrac{e^2}{4}$.

Γ3. $\lambda e^x \geq x^2 \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x^2}\geq \dfrac{1}{\lambda} \Leftrightarrow f(x)\geq \dfrac{1}{\lambda}$ (1)

ξέρουμε ότι ισχύει $f(x)\geq e^2/4$ οπότε για να ικανοποιείται

η (1) πρέπει: $\dfrac{1}{\lambda}\leq\dfrac{e^2}{4} \Leftrightarrow \boxed{\lambda\geq\dfrac{4}{e^2}}$ Άρα $\boxed{\lambda_{min}=\dfrac{4}{e^2}}$

Γ4. $3e^{a} + (a\beta)^2 e^{\frac{1}{\beta}} = (ea)^2$

$\overset{:a^2}{\Longrightarrow} 3\dfrac{e^a}{a^2} + \beta^2 \cdot e^{\frac{1}{\beta}} = e^2 \Leftrightarrow 3f(a) + \dfrac{e^{\frac{1}{\beta}}}{(\frac{1}{\beta})^2} = e^2$

$\Leftrightarrow \boxed{3f(a) + f(\tfrac{1}{\beta}) = e^2}$ (1)

όμως ισχύει $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow \boxed{f(x) \geq e^2/4}$ (2)

$(2) \overset{x=a}{\Longrightarrow} f(a) \geq e^2/4 \Leftrightarrow 3f(a) \geq \dfrac{3e^2}{4}$

$(2) \overset{x=1/\beta}{\Longrightarrow} f(1/\beta) \geq e^2/4$

$\overset{(+)}{\Longrightarrow}$

$\boxed{3f(a) + f(1/\beta) \geq e^2}$

Συνεπώς για να ισχύει η (1) πρέπει τα a και $\frac{1}{\beta}$ να συμπίπτουν με την θέση ελάχιστου

οπότε $\boxed{a=2}$ και $\frac{1}{\beta} = 2 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1/2}$

Γ5. Απο υπόθεση το $M(x,y)$ κινείται κατά μήκος της $y = \dfrac{e^x}{x^2}$ τότε $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ και $x'(t) = 3$.

Το ζητούμενο είναι το $y'(t_0)$ όπου την χρονική στιγμή t_0: εφ // $y = -ex + 7 \Rightarrow \lambda_{εφ} = -e$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = -e \Leftrightarrow \dfrac{e^x(x-2)}{x^3} = -e \Rightarrow$ προφανής ρίζα.

$\boxed{x_0 = 1}$

6

$$f''(x) = \frac{(e^x(x-2)+e^x)\cdot x^3 - 3x^2\cdot e^x(x-2)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x(x-1)x^3 - 3x^2 e^x(x-2)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x\cdot x^2[x(x-1)-3(x-2)]}{x^4} = \frac{e^x\cdot x^2(x^2-4x+6)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x\cdot(\overbrace{x^2-4x+6}^{\Delta<0})}{x^2} > 0 \Rightarrow f' \nearrow \text{ άρα η εξίσωση}$$

$f'(x) = -e$ έχει μοναδική λύση. $\boxed{x=+1}$

έτσι $y(t) = \dfrac{e^{x(t)}}{x^2(t)}$, $y'(t) = \dfrac{e^{x(t)}\cdot x'(t)\cdot x^2(t) - 2x(t)x'(t)\,e^{x(t)}}{x^4(t)}$

$$\xrightarrow[x(t_0)=1]{t=t_0,\, x'(t)=3} y'(t_0) = \frac{e\cdot 3\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot e}{1}$$

$$\boxed{y'(t_0) = -3e \text{ μον/sec}}$$

$\underline{\underline{\Delta}}$

Δ1) $h(x)=g(x)+x$,

$h'(x)=g'(x)+1>0$ αφού $g'(x)\geq 0$

άρα $h(x)\uparrow \Rightarrow h(x)$ "1-1"

Δ2) $\left(g'(f(x))+1\right)\cdot f'(x)=\dfrac{2x^{\ln x}}{x}\cdot \ln x\cdot\left(g'(x^{\ln x})+1\right)$

$\Leftrightarrow g'(f(x))\cdot f'(x)+f'(x)=2x^{\ln x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}\cdot g'(x^{\ln x})+2x^{\ln x}\cdot\dfrac{\ln x}{x}$

$\Leftrightarrow \left(g(f(x))+f(x)\right)'=\left(g(x^{\ln x})+x^{\ln x}\right)'$

οπότε $\exists\, c\in\mathbb{R}$: $g(f(x))+f(x)=g(x^{\ln x})+x^{\ln x}+c$

$\xrightarrow[f(1)=1]{x=1} g(1)+1=g(1)+1+c \Leftrightarrow c=0.$

Συνεπώς: $g(f(x))+f(x)=g(x^{\ln x})+x^{\ln x}$ (1)

Έστω $k(x)=g(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$.

$k'(x)=g'(x)+1>0\Rightarrow k(x)\uparrow\Rightarrow k(x)$: "1-1"

$(1)\Rightarrow k(f(x))=k(x^{\ln x})\xLeftrightarrow{k\text{ "1-1"}}\boxed{f(x)=x^{\ln x}}$

Δ3) $f(x)=x^{\ln x}=e^{\ln x\ln x}=e^{\ln^2 x}$

$f'(x)=e^{\ln^2 x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}$

$f''(x)=e^{\ln^2 x}\cdot\left(2\ln x\cdot\frac{1}{x}\right)^2+e^{\ln^2 x}\cdot\left(2\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x^2}\right)$

$=e^{\ln^2 x}\left[\dfrac{4\ln^2 x}{x^2}+\dfrac{2-2\ln x}{x^2}\right]=\dfrac{2}{x^2}e^{\ln^2 x}\left(\underbrace{2\ln^2 x-\ln x+1}\right)$

$\Delta=1-4\cdot 2\cdot 1=-7<0$
Αρα θετικό.

οπότε $f''(x)>0\Rightarrow f'\uparrow$

• $x^{\ln x} \cdot \ln x = 22x \Leftrightarrow 2x^{\ln x} \cdot \ln x = 44x$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^{\ln x} \cdot \ln x}{x} = 44 \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 44}$

$A = (0, +\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f' \uparrow} f'(A) = \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) \right).$

▶ $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(e^{\ln^2 x} \cdot 2\dfrac{\ln x}{x} \right) = -\infty$ διότι:

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln^2 x = +\infty$ έτσι $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\ln^2 x} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln x \cdot \dfrac{1}{x} \right) = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$

▶ $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln^2 x} \cdot \dfrac{2\ln x}{x} \quad \dfrac{u = \ln x}{\substack{\text{Για } x \to +\infty \\ \text{το } u \to +\infty}}$

$= \lim\limits_{u \to +\infty} e^{u^2} \cdot \dfrac{2u}{e^u} = \lim\limits_{u \to +\infty} \left(2u \cdot e^{u^2 - u} \right) = +\infty$

Έτσι $f'(A) = (-\infty, +\infty)$ οπότε $44 \in f'(A)$ και αφού $f' \uparrow$ (f U) $\exists$ μοναδικό $x_0 \in A$: $f'(x_0) = 44$.

$\longrightarrow (\Delta_4) \longrightarrow$

Δ5) $(x + 2020)^{\ln(x+2020)} - x^{\ln x} + 1 = 2021^{\ln 2021}$

$\Leftrightarrow (x + 2020)^{\ln(x+2020)} - x^{\ln x} = 2021^{\ln 2021} - 1$

$\Leftrightarrow (x + 2020)^{\ln(x+2020)} - x^{\ln x} = (1 + 2020)^{\ln(1+2020)} - 1^{\ln 1}$

$\Leftrightarrow f(x + 2020) - f(x) = f(1 + 2020) - f(1)$

Έστω $M(x) = f(x + 2020) - f(x)$, $x > 0$

$M'(x) = f'(x + 2020) - f'(x)$

$x+2020 > x \xLeftrightarrow{f' \uparrow} f'(x+2020) > f'(x)$

Συνεπώς $M'(x) > 0 \Rightarrow M(x) \uparrow \Rightarrow M(x)$ "1-1"

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$M(x) = M(1) \xLeftrightarrow{M: \text{"1-1"}} \boxed{x=1}$

Δ4.

Από ΘΜΤ στο $[1,x]$ $\exists\, \xi_1 \in (1,x)$: $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Από ΘΜΤ στο $[x,x+1]$ $\exists\, \xi_2 \in (x,x+1)$: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f(x+1)-f(x)$

$\xi_1 < \xi_2 \xLeftrightarrow{f' \uparrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x)-1}{x-1} < f(x+1)-f(x)$

$\xLeftrightarrow{x-1>0} f(x)-1 < (x-1)f(x+1) - (x-1)f(x)$

$\Leftrightarrow \cancel{f(x)}-1 < (x-1)f(x+1) - xf(x) + \cancel{f(x)}$

$\Leftrightarrow \boxed{xf(x) - 1 < (x-1)f(x+1)}$