

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 5 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να γράψετε :

α) Κανόνα Del 'Hospital (μία από τις 2 περιπτώσεις),

β) Τι καλείτε ρυθμός μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0

(6μ)

B) Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να γράψετε την γεωμετρική ερμηνεία .

(3+2μ)

Γ) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ ισχύει ότι υπάρχει $x_0 \in (α, β) : f'(x_0) = 0$ τότε $f(α) = f(β)$ >>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήστε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(1+3μ)

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν $f(α) \cdot f(β) < 0$ τότε υπάρχει $x_0 \in (α, β) : f(x_0) = 0$.

2. Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.

3. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano για την συνάρτηση f τότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τουλάχιστον μία φορά τον οριζόντιο άξονα.

4. Κάθε πραγματική συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο ανάμεσα από τις διαδοχικές της ρίζες.

5. Αν η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και $f(α) \cdot f(β) > 0$ τότε δεν παρουσιάζει ρίζα στο $(α, β)$.

(10μ)

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός, ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr

ΘΕΜΑ 2^ο

Αν για την συνεχή συνάρτηση f ισχύει $|f(x)| = 2\sqrt{x^2 + x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 4$ τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$ (7μ)
2. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της f . (6μ)
3. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτόμενης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 2020$ (6μ)
4. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$ παρουσιάζει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$ (6μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+9} - \alpha & , x < 0 \\ (x-\beta) \cdot e^x + x^2 - 2 & , x \geq 0 \end{cases}$. Αν ισχύει το θεώρημα Rolle για την f

στο διάστημα $[-4, 1]$ τότε:

1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=6$ και $\beta=1$. (7μ)
2. Να βρεθεί η $f'(x)$ και να αποδείξετε ότι η f για $x > 0$ παρουσιάζει μοναδική ρίζα $x_0 \in (1,2)$. (5+3μ)
3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = -x - 6$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3f^2(x) + 4x^3 \eta\mu(1/x)}{x^2 f(x) + x^3 + 7x^2}$. (5μ)
4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x(e^x + 2) \ln(2 - x) = \frac{f(x)}{2-x}$ παρουσιάζει ρίζα στο $(1,2)$ (5μ)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- $f^2(x) + 2f(x)\ln x - 3\ln^2 x = 0$ και $f(e) = 1, f\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.
- $g(0) = -2$ και $e^{(g(2)-10)^2} - e^{(80-g(2))^2} = 2f\left(\left|\frac{80-g(2)}{g(2)-10}\right|\right)$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x > 0$. (7μ)

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1
Ζωγράφου , ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13
Χολαργός , ☎ 210 65 36 551
www.en-dynamei.gr



2. Ένα σώμα M κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Αν A, B οι προβολές του σημείου M στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα τότε να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ABO όπου O η αρχή των αξόνων κατά την χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι e^2 . (6μ)
3. Να αποδείξετε ότι $g(2) = 45$ (6μ)
4. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά $x_1, x_2 \in (0,2)$ για τα οποία ισχύει $g(x_1)g(x_2) + 2x_1x_2 = 0$. (6μ)



En Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

...ΕΥΧΟΜΕΘΑ ΕΠΙΤΥΧΙΑ...