ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ
ΛΥΚΕΙΟΥ 02/06/2025

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα186

Α2. Σχολικό σελίδα 76

Α3. Σχολικό σελίδα 161

Α4.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0=1 και είναι και παραγωγίσιμη, από θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(1) = 0$ (1)

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$, άρα η (1) $\Rightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$

Β2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
f'	-	0	-	0	+
f	↗		↘		↗

$\Delta_1 = (0,1), \qquad \Delta_2 = [1,3], \quad \Delta_3 = (3,+\infty)$

$f(\Delta_1) = f\big((0,1)\big) \overset{\alpha ύ\xi o\upsilon\sigma\alpha, \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma.}{=} (\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)) = (-3,1),$

$f(\Delta_2) = f([1,3]) \overset{\varphi\theta ί\nu o\upsilon\sigma\alpha, \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma.}{=} [f(3), f(1)] = [-3,1],$

$f(\Delta_3) = f((3,+\infty)) \overset{\alpha ύ\xi o\upsilon\sigma\alpha, \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\eta\varsigma.}{=} (\lim\limits_{x\to 3^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = (3,+\infty),$

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Αφού $0 \in f(\Delta_2)$και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Αφού $0 \in f(\Delta_3)$και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_3$τέτοιο ώστε $f(x_3) = 0$

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές ρίζες

B3. $f''(x) = 6x - 12$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f''	$\frown$		$\smile$

Για $x \in (-\infty, 2]$ η f είναι κυρτή

Για $x \in (2, +\infty]$ η f είναι κοίλη

Στο x_0=2 η f παρουσιάζει σημείο καμπής στο (2,-1)

B4. Η εφαπτομένη της f στο Α(ξ.f(ξ)) είναι

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$$

Η εφαπτομένη της f στο Β(ξ.f(ξ)) είναι

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)(x-\xi) + g(\xi) \Leftrightarrow$$

$$y = \big(1 + f'(\xi)\big)(x-\xi) + \xi + f(\xi)$$

εξισώνοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει:

$$f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi) = \big(1 + f'(\xi)\big)(x-\xi) + \xi + f(\xi) \Leftrightarrow x = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x ημx = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$

$f(0) = 0$

Συνεπώς αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x ημx}{x} = \lim_{x\to 0^-} e^x \cdot \lim_{x\to 0^-}\frac{ημx}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Γ2. $λ = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = 1$

$β = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} =$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{2}$, άρα η $y = x + \frac{1}{2}$ πλάγια ασύμπτωτη στο$+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x ημx = 0$ αφού

$|e^x ημx| \le e^x \Rightarrow -e^x \le e^x ημx \le e^x$,επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = 0$ από κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x ημx = 0$

Άρα η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$

Γ3. $f(x) = y \Rightarrow e^x ημx = x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x ημx - x - \frac{1}{2} = 0$

Θεωρώ $g(x) = e^x ημx - x - \frac{1}{2}, x \in [-π, 0]$

Η g συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών

$g(-\pi) = \pi - \frac{1}{2} > 0$

$g(0) = -\frac{1}{2} < 0$

Άρα, από θεώρημα *Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$, δηλαδή η Cf τέμνει την $y = x + \frac{1}{2}$ σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Έστω $M\big(x(t), y(t)\big)$ με $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ με $x'(t) > 0$

Για

$y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{2x(t)x'(t)+x'(t)}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = x'(t) \Leftrightarrow$

$2x(t)x'(t) + x'(t) = x'(t)2\sqrt{x^2(t) + x(t)} \Leftrightarrow 4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4x^2(t) + 24x(t) \Leftrightarrow 1 = 0$ αδύνατο

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = \frac{F(x)}{e^{\ln^2 x}}$

$$g'(x) = \frac{F'(x)e^{\ln^2 x} - F(x)e^{\ln^2 x}2\ln x\frac{1}{x}}{(e^{\ln^2 x})^2} = \frac{f(x)e^{\ln^2 x} - f(x)e^{\ln^2 x}}{(e^{\ln^2 x})^2} = 0$$

Άρα η g σταθερή

Δ2. Στην αρχική σχέση για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 2F(1)\ln 1 = 0$. Η εφαπτομένη της Cf στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$ επομένως έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(1) = 2$. Έχουμε:

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = 2$ αφού

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

Η F είναι συνεχής επομένως

$$\lim_{x\to 1}\frac{2F(x)}{x} = 2 \Leftrightarrow 2F(1) = 2 \Leftrightarrow F(1) = 1$$

Η συνάρτηση g είναι σταθερή επομένως υπάρχει $c \in R$ τέτοιο ώστε $g(x) = c$ $\Leftrightarrow \mathrm{F(x)} = \mathrm{cx^{lnx}}, x > 0$. Για $x = 1$ έχουμε $F(1) = c \cdot 10 \Leftrightarrow c = F(1) = 1$. Άρα $\mathrm{F(x)} = \mathrm{x^{lnx}}, x > 0$.

Δ3. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\mathrm{F'(x)} = e^{\ln^2 x}\frac{2\ln x}{x}$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Επομένως το πρόσημο της F' εξαρτάται μόνο από το $\ln x$, δηλαδή

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ και}$$

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

$$F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 = 0 \text{ για } \chi > 0$$

Η εξίσωση έχει προφανής ρίζα το χ=1

Αν χ>1, $x^2 > x \overset{\text{αύξουσα,}}{=} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow$

$F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$ Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν 0<χ<1, , $x^2 < x \overset{\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{=} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \Leftrightarrow$

$F(x^2) - F(x) + (x-1)^2 > 0$ Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη

Άρα μοναδική λύση το χ=1

Δ4. $E(\Omega) = \int_1^e |F(x)|\,dx$ η $F(x) > 0$ άρα $E(\Omega) = \int_1^e F(x)\,dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$

Από εφαρμογή ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για $x = \ln^2 x$ έχω

$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \Leftrightarrow F(x) \geq \ln^2 x + 1$ και επειδή η ισότητα ισχύει για χ=1 από θεώρημα $\int_1^e F(x)\,dx > \int_1^e (\ln^2 \chi + 1)\,dx$

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx + \int_1^e 1\,dx = [x\ln^2 x]_1^e - \int_1^e 2x\frac{\ln x}{x}dx + [x]_1^e$$
$$= e - 2([x\ln x - x]_1^e) + e - 1 = e - 2 + e - 1 = 2e - 3$$

Άρα E>2e-3