2ος τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in (1,+\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1+1}{x_1-1} = \dfrac{x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{x_1 x_2} - x_1 + x_2 \cancel{-1} = \cancel{x_1 x_2} - x_2 + x_1 \cancel{-1} \Rightarrow -2x_1 = -2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα 1-1 και αντιστρέφεται.

Στην συνέχεια θα βρούμε την αντίστροφη με δύο τρόπους:

1ος τρόπος: (Χρειάζεται μονοτονία) Είναι $f \searrow (1,+\infty)$ και συνεχής άρα:

$f\left((1,+\infty)\right) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1,+\infty) = D_{f^{-1}}$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$ και

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ επειδή $x-1>0$ για κάθε x κοντά στο 1 από μεγαλύτερες τιμές.

Για κάθε $x, y \in (1,+\infty)$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$, $y>1$ άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$ και προφανώς $f = f^{-1}$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = yx - y \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(y-1) = y+1 \quad (1)$

Αν $y=1$ τότε $0=2$ αδύνατο

Αν $y \neq 1$ τότε $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{y+1}{y-1}$

Πρέπει $x>1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y-1>0 \Leftrightarrow y>1$ άρα $f^{-1}(y) = \dfrac{y+1}{y-1}$, $y>1$

δηλαδή $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$ και προφανώς $f = f^{-1}$.

Β3. Η r είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(r(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

Άρα έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = x$. Προφανώς δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Β4. Για κάθε $x>1$ είναι $f^{-1}(f(x)) = x$. Άρα για $x>1$ έχουμε $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1)$ ή $(x-4=0 \Leftrightarrow x=4)$ και επειδή $x>1$ τότε μοναδική ρίζα η $x=4$.

Θέμα Γ

Γ1. $f(x)=\begin{cases} -2x+4+e^{\lambda} & ,0\le x<2 \\ -x^2+4x-3+\lambda & ,x\ge 2 \end{cases}$

Επειδή η f είναι συνεχής τότε $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)=1+\lambda \Leftrightarrow e^{\lambda}=\lambda+1\Leftrightarrow \lambda=0$ γιατί $e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$. Άρα $f(x)=\begin{cases} -2x+5 & ,0\le x<2 \\ -x^2+4x-3 & ,x\ge 2 \end{cases}$

Γ2. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=-2<0$
Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με $f'(x)=-2x+4<0$ για κ
Επειδή η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ τότε $f\searrow[0,+\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο για $x=0$ το $f(0)=5$.

Γ3. i) Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $[0,2)$ και $(2,3]$

Είναι $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+5-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2x+4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=-2$ και

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(x^2-4x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}}=0$

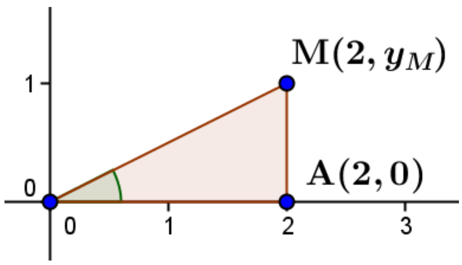
Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ επομένως δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο διάστημα $[0,3]$.

ii) $\lambda_{\Delta E}=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{0-5}{3}=-\dfrac{5}{3}$

Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -2=-\dfrac{5}{3}$ αδύνατη

Για κάθε $2<x<3$ είναι $f'(x)=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -2x+4=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow 6x-12=5\Leftrightarrow 6x=17\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{6}$ δεκτή γιατί $2=\dfrac{12}{6}<\dfrac{17}{6}<3=\dfrac{18}{6}$. Άρα η εφαπτόμενη στο $\Gamma(\xi,f(\xi))$ με $\xi=\dfrac{17}{6}$ είναι παράλληλη στην ΔΕ.

Γ4. Είναι $M(2,y(t))$ με $y(0)=0$



$y'(t)=0,5\Leftrightarrow y'(t)=(0,5t)'\Leftrightarrow y(t)=0,5t+c$, $c\in\mathbb{R}$

Για $t=0$ είναι $y(0)=c\Leftrightarrow c=0$ άρα $y(t)=0,5t$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το Μ θα συναντήσει την C_f.

Τότε $y(t_0)=f(2)=1$.

Είναι $\varepsilon\varphi\omega(t)=\dfrac{y(t)}{2}$ άρα $\varepsilon\varphi\omega(t_0)=\dfrac{y(t_0)}{2}=\dfrac{1}{2}$

$(\varepsilon\varphi\omega(t))'=\dfrac{y'(t)}{2}\Leftrightarrow \dfrac{\omega'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=\dfrac{0,5}{2}\Leftrightarrow \omega'(t)\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t)+1\right)=\dfrac{1}{4}$ γιατί $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}=\varepsilon\varphi^2\omega(t)+1$.

Για $t=t_0$ είναι $\omega'(t_0)\left(\varepsilon\varphi^2\omega(t_0)+1\right)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \omega'(t)\left(\dfrac{1}{4}+1\right)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \omega'(t)\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \omega'(t)=\dfrac{1}{5}$ rad/sec.