ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2026

ΘΕΜΑ Α

Α1: Θεωρία σελ. 133 **Α2:** Θεωρία σελ. 51 **Α3:** Θεωρία σελ. 185
Α4: α) Λ β) Σ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1

$$\begin{aligned} A_h &= A_{fog} = \{x \in A_g \mid g(x) \in A_f\} = \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2}+1 > 1\} \\ &= \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} > 0\} = (2, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{x-2}\right)^2 = \ln(x-2), \quad x > 2 \end{aligned}$$

Β2

Έστω $A = (2, +\infty)$.
Η h παραγωγίσιμη στο A ως πράξεις παραγωγίσιμων, με:

$$h'(x) = \frac{1}{x-2} > 0 \quad \Rightarrow \quad h \uparrow \text{ στο } A \quad (\text{άρα 1-1})$$

Η h συνεχής και $\uparrow$ στο A, οπότε:

$$h(A) = \left(\lim_{x\to 2^+} \ln(x-2),\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x-2)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Για $y \in \mathbb{R}$ και $x \in A$ θέτουμε $h(x) = y$:

$$h(x) = y \ \Leftrightarrow\ \ln(x-2) = y \ \Leftrightarrow\ x-2 = e^y \ \Leftrightarrow\ x = e^y + 2$$

Άρα $h^{-1}(x) = e^x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Β3

$$\lim_{x\to 2^+} \ln(x-2) \cdot \frac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{(*)}{=} -\infty \cdot 2 = -\infty$$

(*) Με κανόνα De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\ln(x-1)}{x-2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 2^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{1} = 1$$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ1

Έστω $k \neq 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{kx^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{kx^3}{x^2} = \alpha \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} kx = \alpha$$

Αν $k > 0$ τότε $\lim_{x \to +\infty} kx = +\infty$, ενώ αν $k < 0$ τότε $\lim_{x \to +\infty} kx = -\infty$. Και στις δύο περιπτώσεις το όριο δεν ανήκει στο $\mathbb{R}$, άτοπο.
Άρα $k = 0$.

Με $k = 0$: $f(x) = \dfrac{\mu x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
Η $y = x$ εφάπτεται της C_f στο $(0, 0)$, άρα $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\mu(x^2 + 1) - 2x \cdot \mu x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

Άρα $\boxed{f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}}$.

Γ2

(i)

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x \cdot x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Ρίζες παραγώγου: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$ (ΤΕ)	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ (ΤΜ)	$\searrow$	0

(ii) Υπολογισμός τιμών:

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$$

Όρια στο $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Η f συνεχής και $\downarrow$ στο $\Delta_1 = (-\infty, -1]$: $f(\Delta_1) = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$
Η f συνεχής και $\uparrow$ στο $\Delta_2 = [-1, 1]$: $f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
Η f συνεχής και $\downarrow$ στο $\Delta_3 = [1, +\infty)$: $f(\Delta_3) = \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$$f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Αφού $\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$, άρα $\alpha^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$, $\alpha^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$, $\alpha^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_3)$.
Άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha^2 + \frac{1}{2}$ έχει ακριβώς μία ρίζα, μόνο όταν $\alpha = 0$.
(*) Στο $x_2 = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο.

Γ3

(i)

$$\begin{aligned} I_\nu + I_{\nu+1} &= \int_0^1 \left(\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1}\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}\, dx \\ &= \int_0^1 x^{2\nu+1}\, dx \\ &= \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} \end{aligned}$$

(ii)

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

Για $\nu = 0$:

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$$

Για $\nu = 1$:

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Θεωρούμε $h(x) = g(x) + x$, $x \in [-1, 0]$.
Η h συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πράξεις συνεχών.
Για $x = -1$: $0 < g(-1) < 1 \;\Rightarrow\; g(-1) - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; h(-1) < 0$
Για $x = 0$: $0 < g(0) < 1 \;\Rightarrow\; g(0) > 0 \;\Leftrightarrow\; h(0) > 0$

$$h(0) \cdot h(-1) < 0$$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε $h(x_1) = 0$, δηλαδή $g(x_1) + x_1 = 0$.

Η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων, με $h'(x) = g'(x) + 1$.
Έστω $\rho_1 < \rho_2$ με $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$. Τότε από θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \;\Leftrightarrow\; g'(\xi) + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; g'(\xi) = -1 \quad \text{Άτοπο.}$$

Οπότε η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) + x = 0$ έχει μοναδική ρίζα την x_1.

Δ2

$$f(x) = \begin{cases} x^2\big(g(x) + x\big), & x < 0 \\ 2\,\text{ημ}x + \text{εφ}x - \kappa x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2\big(g(x)+x\big)}{x} = \lim_{x\to 0^-} x\big(g(x)+x\big) = 0 \cdot \big(g(0)+0\big) = 0 \quad (\text{επειδή } g \text{ συνεχής στο } 0)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\,\text{ημ}x + \text{εφ}x - \kappa x}{x} \overset{\text{DLH}}{=} \lim_{x\to 0^+} \left(2\,\text{συν}x + \frac{1}{\text{συν}^2 x} - \kappa\right) = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, ισχύει:

$$3 - \kappa = 0 \;\Leftrightarrow\; \kappa = 3$$

Δ3

$$f(x) = 2\,\text{ημ}x + \text{εφ}x - 3x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

(i)

$$f'(x) = 2\,\text{συν}x + \frac{1}{\text{συν}^2 x} - 3 = \frac{2\,\text{συν}^3 x - 3\,\text{συν}^2 x + 1}{\text{συν}^2 x} = \frac{(\text{συν}x - 1)^2 \cdot 2\left(\text{συν}x + \frac{1}{2}\right)}{\text{συν}^2 x} \ge 0$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x=0$.
Άρα $f \uparrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$x \geq 0 \overset{(f\uparrow)}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0)=0$, άρα $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα:

$$f(\Delta)=\left[f(0), \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)=[0,+\infty)$$

Αφού $\dfrac{\pi}{3} \in f(\Delta)=[0,+\infty)$, η εξίσωση $f(x)=\dfrac{\pi}{3}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_2 η οποία είναι μοναδική αφού f γνησίως αύξουσα στο Δ.

Δ4

(i) Για $x<0$: $f(x)=x^2\big(g(x)+x\big)$.

Από Δ1 έχουμε ότι η $g(x)+x$ δεν μηδενίζεται στο $(x_1,0]$. Επειδή $h(0)=g(0)>0$, η $g(x)+x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο (θετικό) στο $(x_1,0]$, άρα $g(x)+x>0 \ \forall x \in (x_1,0]$.

Άρα $f(x)=x^2 \cdot \big(g(x)+x\big) \geq 0$, $x \in [x_1,0]$, αφού $f(x_1)=x_1^2 \cdot 0=0$ και f συνεχής στο $x_0=0$.

(ii)

$$E(\Omega)=\int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|\,dx$$

Επειδή $f(x) \geq 0$ από Δ3(ι) και Δ4(ι), έχουμε $|f(x)|=f(x)$, άρα:

$$E(\Omega)=\int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

Από υπόθεση:

$$\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

Άρα $E(\Omega)=I_1+I_2$ με $I_1=I_2$.

Υπολογισμός I_1:

$$I_1=\int_{x_1}^{0} x^2\big(g(x)+x\big)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\big(g(x)+x\big)\right]_{x_1}^{0}-\int_{x_1}^{0}\frac{x^3}{3}\big(g'(x)+1\big)\,dx$$

$$=0-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx-\frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0}=-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx+\frac{x_1^4}{12}$$

Υπολογισμός I_2:

$$I_2=\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\big(2\,\text{ημ}x+\text{εφ}x-3x\big)\,dx=\left[-2\,\text{συν}x-\ln(\text{συν}x)-\tfrac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(-2\cdot\tfrac{1}{2}-\ln\tfrac{1}{2}-\frac{3\cdot\frac{\pi^2}{9}}{2}\right)-\big(-2\cdot 1-\ln 1-0\big)=-1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}+2=1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

Από $I_1 = I_2$:

$$-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx + \frac{x_1^4}{12} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$