11/02/2024

Διαγώνισμα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

A1) Σχολικό βιβλίο, σελίδα 79

A2) i) Δ

ii) Δ

iii) Β

A3) Πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

A4) i) Λ

ii) Λ

iii) Λ

iv) Σ

v) Σ

Θέμα Β

B1) α) $(2+\sqrt{5})^2 = 4+4\sqrt{5}+5 = 9+4\sqrt{5}$

$(1-\sqrt{5})^2 = 1-2\sqrt{5}+5 = 6-2\sqrt{5}$

β) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = |2+\sqrt{5}| + |1-\sqrt{5}| =$

$= 2+\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} = 1+2\sqrt{5}$

διότι $2+\sqrt{5} > 0$ και $1 < \sqrt{5}$ άρα $1-\sqrt{5} < 0$

B2) α) $A+B = \dfrac{1}{3-\sqrt{7}} + \dfrac{1}{3+\sqrt{7}} = \dfrac{3+\sqrt{7} + 3-\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \dfrac{6}{9-7} = \dfrac{6}{2} = 3$

$A \cdot B = \dfrac{1}{3-\sqrt{7}} \cdot \dfrac{1}{3+\sqrt{7}} = \dfrac{1}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} = \dfrac{1}{9-7} = \dfrac{1}{2}$

β) Αφού $S = A+B = 3$ & $P = A \cdot B = \frac{1}{2}$ τότε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τα Α & Β είναι η:

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0$$

Θέμα Γ

Γ i) Πρέπει $x \neq 0$

Θέτω $x+\frac{1}{x}=w$; η εξίσωση γίνεται:

$$w^2-5w+6=0$$

$\Delta=25-24=1$

$w_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases}3\\2\end{cases}$

Άρα $w=3$ ή $w=2$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=3$

$\Leftrightarrow x^2-3x+1=0$

$\Delta=9-4=5$

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\frac{3+\sqrt{5}}{2}\\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=2$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x-1=0$

$\Leftrightarrow x=1$

ii) $\Delta=[-(5-\sqrt{2})]^2-4\cdot1\cdot(6-3\sqrt{2})=$

$=25-10\sqrt{2}+2-24+12\sqrt{2}=$

$=1+2\sqrt{2}+2$

$=(1+\sqrt{2})^2$

$x_{1,2}=\frac{5-\sqrt{2}\pm(1+\sqrt{2})}{2}=\begin{cases}3\\ \frac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}\end{cases}$

iii) $|2x-3|=3-2x$

Πρέπει $2x-3\leq0 \Leftrightarrow 2x\leq3 \Leftrightarrow x\leq\frac{3}{2}$

Γ2 i) $\Delta = 25 + 8 = 33 > 0$ αρα η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές κ' άνισες

ii) 1) $S = x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$

$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2}$

2) Αφού $(x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ τοτε

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{4} + 1$

$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{29}{4}$

3) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{29}{4} + \frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \frac{31}{4}$

$\Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 = -\frac{155}{8}$

4) $(x_1^2 - x_1x_2)(x_1x_2 - x_2^2) =$

$= \left(x_1^2 + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - x_2^2\right) =$

$= -\frac{1}{2}x_1^2 - x_1^2 \cdot x_2^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x_2^2 =$

$= -\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) - (x_1x_2)^2 - \frac{1}{4} =$

$= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{29}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} =$

$= -\frac{29}{8} - \frac{1}{2} =$

$= -\frac{33}{8}$

5) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2} = \sqrt{\frac{29}{4} + 1} = \frac{\sqrt{33}}{2}$

Θέμα Δ

Δ1) $x+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{x}$

Πρέπει $x\neq 0$

$\text{ΕΚΠ}(a,x)=a\cdot x$

$$ax^2+x=a^2x+a$$
$$\Leftrightarrow ax^2+(1-a^2)\cdot x-a=0$$

$\Delta=(1-a^2)^2+4a^2=1-2a^2+a^4+4a^2=1+2a^2+a^4=(1+a^2)^2>0$

για κάθε $a\neq 0$ αφού $a^2+1>0$

$$x_{1,2}=\frac{-(1-a^2)\pm(1+a^2)}{2a}=\begin{cases}\frac{2a^2}{2a}=a\\ -\frac{2}{2a}=-\frac{1}{a}\end{cases}$$

Δ2) i) $\Delta=\left[-(\lambda^2+1)\right]^2-4\cdot\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=$
$=(\lambda^2-1)^2$

Αφου $(\lambda^2-1)^2\geq 0$ για καθε $\lambda\neq 0$ τοτε η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

ii) $S = x_1 + x_2 = -\frac{-(\lambda^2+1)}{\lambda} = \frac{\lambda^2+1}{\lambda}$

$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$

iii) Αφού $\lambda > 0$ & $\lambda^2+1>0$ για κάθε $\lambda>0$ τότε $S>0$ & αφού $P=1>0$ τότε η εξίσωση έχει ρίζες θετικές.

iv) $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\frac{\lambda^2+1}{\lambda}}{2} = \frac{\lambda^2+1}{2\lambda}$

Έστω ότι $\frac{x_1+x_2}{2} < 1$. Τότε $\frac{\lambda^2+1}{2\lambda} < 1 \Leftrightarrow$

$\overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} \lambda^2+1 < 2\lambda$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 < 0$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 < 0$

Άτοπο

Άρα $\frac{x_1+x_2}{2} > 1$