ΘΕΜΑ Α

Α1. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελ. 33

Α2. Κριτήριο Παρεμβολής σελ. 51 σχ. βιβλ.

Α3. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής

Γιατί το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ μπορεί να μην υπάρχει

Παράδειγμα

Έστω $f(x)=\begin{cases} -1 & x\leq 0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$ όπου $|f(x)|=1$ άρα $\lim_{x\to 0}|f(x)|=1$

Όμως $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ άρα $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$

Α4. Σχολικό βιβλίο σελ. 36

Α5. 1. Λ
2. Σ
3. Λ $\xrightarrow{\text{αιτιολόγηση}}$ 3. $f(x)=\ln x$ $A_f=(0,+\infty)$

$g(x)=e^{-x}$ $A_g=\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} x>0 \\ \ln x\in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $A_{g\circ f}=(0,+\infty)$

$g(f(x))=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=\frac{1}{x}$

ΘΕΜΑ Β

1. $A_f=[0,4]$, $f(A)=[-1,0)\cup[1,\frac{5}{2}]\cup(\frac{8}{3},5]$

2. α. $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει γιατί:

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1^-} f(x)=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=1 \end{array}\right\}$ $\lim_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

β. $\lim_{x\to 2} f(x)$ δεν υπάρχει γιατί

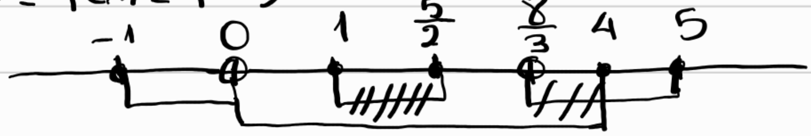
$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x)=\frac{5}{2} \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\frac{8}{3} \end{array}\right\}$ $\lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+}$

γ. $\lim_{x\to 4} f(x)=5=\lim_{x\to 4^-} f(x)$

δ. $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}} f(x)=3$

3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f\circ f$

$$\left.\begin{matrix} x\in A_f \\ f(x)\in A_f \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 0\le x\le 4 \\ 0\le f(x)\le 4 \end{matrix}\right\} \quad A_{f\circ f}=\left[1,\tfrac{5}{2}\right]\cup\left(\tfrac{8}{3},4\right]$$



4. Η συνάρτηση αντιστρέφεται γιατί αν φέρουμε οποιαδήποτε στην γραφική μια ευθεία // στον $x'x$ δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη. Άρα η f είναι "1-1" άρα αντιστρέφεται.

5. Να βρεθούν οι τιμές:

α. $f(f(2))$

$f(2)=\frac{5}{2}$ άρα $f(f(2))=f\left(\frac{5}{2}\right)=3$

β. $f(f^{-1}(4))=4$

γ. $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$

Θέτουμε $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=\kappa \overset{f\text{ "1-1"}}{\Longrightarrow} f\left(f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)\right)=f(\kappa)$

$f(\kappa)=\frac{5}{2} \Leftrightarrow f(\kappa)=f(2) \overset{f\text{ "1-1"}}{\Longrightarrow} \kappa=2$

άρα $f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)=2$

6. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x^2-5x+6)=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-3x)(\sqrt{x+6}-x)}{x^2-6x+9}$$

Υπολογίζουμε $\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x^2-3x)(\sqrt{x+6}-x)}{x^2-6x+9}\ \overset{0/0}{=}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}-x)(\sqrt{x+6}+x)}{(x-3)^{\cancel{2}}(\sqrt{x+6}+x)}=$$

-1	1	6	3
$\downarrow$	-3	-6	
-1	-2	$\boxed{0}$	

$$\lim_{x\to 3}\frac{x\cdot(x+6-x^2)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x\cdot\cancel{(x-3)}(-x-2)}{\cancel{(x-3)}(\sqrt{x+6}+x)}=$$

$$\frac{\cancel{3}\cdot(-3-2)}{\cancel{6}\,2}=-\frac{5}{2}$$

Άρα $f(x^2-5x+6)=-\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2}\notin f(A)$ άρα η $f(x^2-5x+6)=-\frac{5}{2}$

είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται $f(x)=x^2-x+1$, $g(x)=\sqrt{4x-3}$ $\quad A_f=\mathbb{R}$

1. Να ορίσετε την $h(x)=g\circ f$ $\quad A_g=[\frac{3}{4},+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} x\in A_f \\ f(x)\in A_g \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x\in\mathbb{R} \\ f(x)\geq\frac{3}{4} \end{array}\right\}\ x\in\mathbb{R} \qquad A_{g\circ f}=\mathbb{R}$$

γιατί: $\quad x^2-x+1\geq\frac{3}{4}\Leftrightarrow 4x^2-4x+4\geq 3\Leftrightarrow$

$4x^2-4x+1\geq 0$

$(2x-1)^2\geq 0$ ισχύει

$$g(f(x))=\sqrt{4f(x)-3}=\sqrt{4(x^2-x+1)-3}=$$

$$\sqrt{4x^2-4x+4-3} = \sqrt{4x^2-4x+1} = \sqrt{(2x-1)^{\cancel{2}}} =$$
$$= |2x-1|$$

2. Να υπολογιστεί το

$$\lim_{x\to 0}\frac{|2x-1|-1}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x+\cancel{1}-\cancel{1}}{\sqrt{x+1}-1} \overset{0/0}{=}$$

$\cdot \lim_{x\to 0}(2x-1) = -1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x(\sqrt{x+1}+1)}{x+\cancel{1}-\cancel{1}} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}{\cancel{x}} = -2\cdot 2$$
$$= -4$$

3. Νδο η g αντιστρέφεται κ' να βρεθεί η αντίστροφη της

$g(x) = \sqrt{4x-3}$ $\qquad A_g = [\frac{3}{4}, +\infty)$

Θδο η g είναι "1-1"

Έστω $x_1, x_2 \in A_g$ με $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow$

$$\sqrt{4x_1-3} = \sqrt{4x_2-3} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{4x_1-3})^{\cancel{2}} = (\sqrt{4x_2-3})^{\cancel{2}} \Leftrightarrow$$

$$4x_1 - \cancel{3} = 4x_2 - \cancel{3} \overset{:4}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1 = x_2$$

Άρα g "1-1" οπότε αντιστρέφεται.

Θετω $g(x)=y \Leftrightarrow \sqrt{4x-3}=y \overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow}$

$$(\sqrt{4x-3})^2=y^2 \Leftrightarrow$$
$$4x-3=y^2 \Leftrightarrow$$
$$4x=y^2+3 \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{y^2+3}{4} \quad (1)$$

πρέπει $x\in A_g$

δηλ. $x \geq \frac{3}{4} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{y^2+3}{4} \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow y^2+3 \geq 3 \Leftrightarrow$
$y^2 \geq 0$

Αρα $g^{-1}(x)=\frac{x^2+3}{4} \quad x\geq 0$

4. Νδο η f ειναι $\nearrow$ στο $[\frac{1}{2},+\infty)$

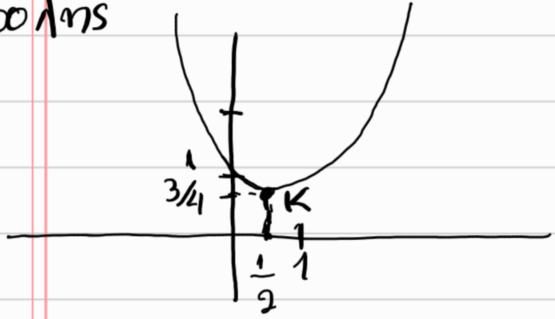
Α' ΤΡΟΠΟΣ ΑΠΟ ΓΡΑΦΙΚΗ

$f(x)=x^2-x+1$

Εστω η κορυφή της παραβολής $K\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$K\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

$\Delta=b^2-4a\gamma$
$=1-4=-3$



σημείο τομής με τον $y'y$:
$y=x^2-x+1$
για $x=0$ $y=1$

Απο $[\frac{1}{2},+\infty)$ η f $\nearrow$

Β' τρόπος

$f(x)=x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+1$

$f(x) = x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1$

$f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

Για $x \in [\frac{1}{2}, +\infty)$

Εστω $x_1, x_2 \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow$

$x_1 - \frac{1}{2} < x_2 - \frac{1}{2}$

$(x_1 - \frac{1}{2})^2 < (x_2 - \frac{1}{2})^2$

$(x_1 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} < (x_2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

$f(x_1) < f(x_2)$

αρα $f \nearrow$

Να λυθει η εξισωση:

$f(x^2+1) - f(|x|+1) = 0$

- $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 > \frac{1}{2}$
- $|x| \geq 0 \Leftrightarrow |x| + 1 \geq 1 > \frac{1}{2}$

αρα $x^2+1, |x|+1 \in [\frac{1}{2}, +\infty)$ οπου η f ειναι $\nearrow$ αρα "1-1"

$f(x^2+1) = f(|x|+1) \overset{f \text{ "1-1"}}{\Longleftrightarrow}$

$x^2 + \cancel{1} = |x| + \cancel{1} \Leftrightarrow x^2 - |x| = 0 \Leftrightarrow$

$|x|^2-|x|=0 \Leftrightarrow |x|(|x|-1)=0 \Leftrightarrow$

$|x|=0$ ή $|x|-1=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow$
$x=0$ $\quad x=\pm 1$

5. Αν $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{ax^2+bx-6}{f(x)+x-2}=4 \quad a=?,\ b=?$

$$\lim_{x\to -1} \frac{ax^2+bx-6}{x^2-x+1+x-2}=4 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{ax^2+bx-6}{x^2-1}=4$$

Θέτω $\dfrac{ax^2+bx-6}{x^2-1}=g(x) \Leftrightarrow$ με $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=4$

$x\neq \pm 1$ $\quad ax^2+bx-6=(x^2-1)g(x)$

$$\lim_{x\to -1}(ax^2+bx-6)=\lim_{x\to -1}[g(x)(x^2-1)]=0$$

$$a-b-6=0 \Leftrightarrow a-6=b \quad (1)$$

Επιστρέφουμε στο όριο κ' αντικαθιστούμε όπου $b=a-6$

$$\lim_{x\to -1} \frac{ax^2+(a-6)x-6}{x^2-1}=4 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{ax^2+ax-6x-6}{(x-1)(x+1)}=4 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax(x+1)-6(x+1)}{(x-1)(x+1)}=4 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(ax-6)}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=4 \Leftrightarrow \frac{-a-6}{-1-1}=4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{-}(a+6)}{\cancel{-}2}=4 \Leftrightarrow a+6=8 \Leftrightarrow \boxed{a=2}$$

Αρα $b=2-6$

$$\boxed{b=-4}$$

ΘΕΜΑ Δ

$h(x)=x^3+\ln x-1 \quad , \quad x>0$

α. Μελέτη μονοτονίας

Εστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow$

$x_1^3<x_2^3$ ①

$x_1<x_2 \overset{\ln x \uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\ln x_1<\ln x_2$ ②

① + ② $\quad x_1^3+\ln x_1 < x_2^3+\ln x_2 \Leftrightarrow$

$x_1^3+\ln x_1-1 < x_2^3+\ln x_2-1$

$h(x_1)<h(x_2)$ αρα $\uparrow$

β. Η $x=1$ ειναι προφανής ρίζα

εφόσον $h(1)=1+\ln 1-1=0$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

για $x<1 \overset{h\uparrow}{\iff}$
$h(x)<h(1)$
$h(x)<0$

$x>1 \overset{h\uparrow}{\iff}$
$h(x)>h(1)$
$h(x)>0$

γ. Αν $1<\alpha<e<\beta$ να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης:

$$h(\ln\alpha)\cdot h(\ln\beta)$$

$1<\alpha<e \overset{\ln x\uparrow}{\iff}$
$\ln 1<\ln\alpha<\ln e$
$0<\ln\alpha<1$

$\beta>e \overset{\ln x\uparrow}{\iff}$
$\ln\beta>\ln e \iff$
$\ln\beta>1$

Εφόσον $0<\ln\alpha<1$
$h(\ln\alpha)<0$

$h(\ln\beta)>0$

Άρα $h(\ln\alpha)\cdot h(\ln\beta)<0$

δ. $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$

Να βρεθεί $\lim\limits_{x\to 1}(h(x)\cdot g(x))$

$\lim\limits_{x\to 1} h(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^3+\ln x-1)=0$ κ' $-1\le g(x)\le 1 \iff$
$|g(x)|\le 1$

$$|g(x)\cdot h(x)|=|g(x)|\cdot|h(x)|\le|h(x)|\cdot 1$$

οπότε $|g(x)h(x)|\le|h(x)| \iff$

$$-|h(x)|\le g(x)\cdot h(x)\le|h(x)|$$

$\lim\limits_{x\to 1}(-|h(x)|)=0$
$\lim\limits_{x\to 1}(|h(x)|)=0$

Από Κ.Π $\lim\limits_{x\to 1} h(x)g(x)=0$

Δ_2. $f^3(x)+3x^2f(x)=4\eta\mu^3 x \quad \forall x$ (1)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α. Νδο $\lambda=1$

$f^3(x)+3x^2f(x)=4\eta\mu^3 x \overset{\div x^3}{\iff}$

για $x\neq 0$

$\frac{f^3(x)}{x^3}+\frac{3x^2f(x)}{x^3}=4\frac{\eta\mu^3 x}{x^3}\iff$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\frac{f(x)}{x}=4\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$

$\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\right)^3+3\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$

απο (1) $\lambda^3+3\lambda=4\iff$

$\lambda^3+3\lambda-4=0\iff$

$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+4)=0$

1	0	3	-4	1
↓	1	1	4	
1	1	4	0	

$\lambda=1$ ή $\lambda^2+\lambda+4=0$

$\Delta=1-16<0$

αδυν.

Αρα $\boxed{\lambda=1}$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x}=1$ (*)

6. i) $\lim_{x\to 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(\eta\mu x)\cdot \eta\mu x}{x\,\eta\mu x} =$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1$

γιατί:

- $\lim_{x\to 0}\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} = \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = 1$

  Θέτω $\eta\mu x = u$

  $\lim_{x\to 0}\eta\mu x = 0$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$

ii) $\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))\cdot f(x)}{f(x)\cdot x} =$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(f(x))}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(f(x))}{f(x)} = \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = 1$

Θέτουμε $f(x) = u$ από ✱✱

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,\ u\to 0$

Από (✱)

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$

Θέτω $\frac{f(x)}{x} = g(x)$ με $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$

$f(x) = x\,g(x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x\,g(x)) = 0$

Άρα $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = 0}$ ✱✱

iii) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x^2-2x)}{x^2-5x+6} =$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x(x-2))}{(x-2)(x-3)} =$

$\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{f(x(x-2))}{x(x-2)} \cdot \dfrac{x}{(x-3)} \right] = 1 \cdot (-2)$
$= -2$

γιατί : • $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x(x-2))}{x(x-2)} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{f(u)}{u} = 1$

Θέτω $x(x-2) = u$

$\lim\limits_{x \to 2} x(x-2) = 0 \ , \ u \to 0$

• $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x-3} = \dfrac{2}{2-3} = \dfrac{2}{-1} = -2$