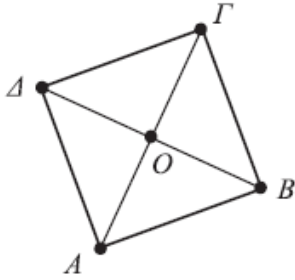


Διαγώνισμα Β' Λυκείου Μαθηματικά
10/11/2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$.

A2. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ κέντρου O και πλευράς 1. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:



i. $\vec{AO} + \vec{OB} = \dots$

iv. $\left(\vec{AB}, \vec{B\Delta}\right) = \dots$

ii. $\vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{B\Delta} + \vec{A\Gamma} = \dots$

v. $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = \dots$

iii. $\left(\vec{AB}, \vec{A\Gamma}\right) = \dots$

vi. $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \dots$

A3. Έστω $A(-2,1)$, $B(1,4)$ και $\Delta(2,-3)$ τρία σημεία στο επίπεδο.

- i. Να βρείτε σημείο Γ του επιπέδου τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.
- ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

Μονάδες 4 – 12 – 9

ΘΕΜΑ Β

B1. Δίνονται σημεία A, B, Γ και Σ για τα οποία ισχύει $2\vec{\Sigma A} + \vec{\Sigma B} - 3\vec{\Sigma \Gamma} = \vec{0}$. Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

B2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -1)$ και $\vec{\beta} = (x, y)$. Το διάνυσμα $\vec{\beta}$ έχει το πέρας του στο 1^ο τεταρτημόριο και ικανοποιεί $|\vec{\beta}| = \sqrt{5}$ και $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = (1, 2)$.
- ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\lambda^2, \lambda + 1)$ να είναι παράλληλο με το $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

B3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

- i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- ii. $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$
- iii. $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})^2$
- iv. $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$

Μονάδες 5 – 8 – 12

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

- Γ2.**
- Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
 - Να δώσετε τον ορισμό του ολικού ελαχίστου για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

- Γ3.**
- Να λυθεί το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} 8\alpha + 3\beta = 53 \\ 9\alpha - 5\beta = 1 \end{cases}$$
.
 - Αν $(\alpha, \beta) = (4, 7)$ είναι η λύση του συστήματος, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta$ και να τη γράψετε στη μορφή $f(x) = (x - p)^2 + q$.
 - Αν $g(x) = x^2$, να γράψετε με τι είδους μετατοπίσεις θα προκύψει η γραφική παράσταση της f από τη γραφική παράσταση της g και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, g .

Γ4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

- Αν η συνάρτηση f είναι άρτια, τότε η $-f$ είναι περιττή.
- Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει ελάχιστο το 2.
- Η συνάρτηση $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + |x|$ είναι άρτια.
- Αν για μια γωνία ω ισχύει $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$, τότε υποχρεωτικά θα είναι $\eta\mu\omega = 1$.
- Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Μονάδες 4 – 4 – 12 – 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $\epsilon\varphi\omega = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$, να βρεθούν και οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω .

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \sigma\upsilon\nu x\right)\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x\right) = \eta\mu^2 x + \epsilon\varphi^2 x$.

Δ3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - \left(\epsilon\varphi^2 \frac{\pi}{3}\right)x}{x^2 + \sigma\upsilon\nu\pi}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- Να λύσετε την ανίσωση $x^2 \leq \frac{f(999)}{f(-999)}x$.

Μονάδες 7 – 6 – 12