

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 7/12/24

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $f'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$.

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

A3. Να ορίσετε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$ και να γράψετε τον τύπο της.

A4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις

- i) Κάθε συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα έχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή
- ii) Αν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά τότε $u(t) > 0$.
- iii) Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και άρτια τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον $x'x$.
- iv) Αν ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε x , τότε η συνάρτηση είναι 1-1.
- v) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της f .

(5 – 5 – 5 – 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

B2. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f' .

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

B4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$.

(6 – 9 – 5 – 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\sqrt[5]{x^4}, & x \leq 0 \\ -x^3 + 3x^2, & x > 0 \end{cases}$.

Γ1. Να εξετάσετε ποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ισχύουν για τη συνάρτηση f στο $[-1, 3]$.

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $(0, +\infty)$.

Γ3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $g(x) = ax^2 + \beta$, $\alpha > 3$, έχουν δύο το πολύ κοινά σημεία για κάθε $x > 0$.

Γ4. Να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^4} dx$.

(6 – 7 – 7 – 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, για την οποία ισχύουν $f(e) = 1$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ και

$$f^2(x) + 2f(x)\ln x = 3\ln^2 x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$.

Δ2. Ένα σώμα M κινείται στη C_f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $0,5 \mu/\text{sec}$. Έστω επίσης A σημείο της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -1

- Να αποδείξετε ότι $A(1, 0)$.
- Αν N είναι η προβολή του M στον άξονα $x'x$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AMN , τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι 2 .

Δ3. Να υπολογίσετε το $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx$.

Δ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{x}$, $x \geq 1$.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία
- Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_g στο x_0 να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(6 – 8 – 3 – 8)