

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 3 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2025

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής και να γράψετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

(5μ)

B) Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση F είναι παράγουσα της f σε ένα διάστημα Δ τότε κάθε άλλη παράγουσα της f θα έχει την μορφή $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

(6μ)

Γ) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

<< Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[a, \beta]$ υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ τότε θα ισχύει $f(a) = f(\beta)$. >>

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(1+3μ)

Δ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν και οι δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .
2. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
3. Αν $\int_a^\beta f(x) dx = 0$ για μια συνεχή συνάρτηση f στο $[a, \beta]$ τότε θα ισχύει $f(x)=0$ στο $[a, \beta]$.
4. Η παράγωγος στο x_0 της συνάρτησης κόστους παραγωγής $k(x)$ συναρτήσει της ποσότητας x ενός παραγόμενου προϊόντος καλείται οριακό κόστος στο x_0 .
5. Τα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης που δεν υπάρχει εφαπτομένη είναι και σημεία που δεν παραγωγίζεται.

(10μ)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f(x) = -\ln x$ και $g(x) = e^x + 1$ τότε:

1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$ (4μ)
2. Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = -\ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της. (8μ)
3. Αν $\Phi(x) = h^{-1}(x) = \ln(1 - e^x) - x$, $x < 0$ να βρείτε το σύνολο τιμών και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης Φ . (8μ)
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{g^2(x)}{g(2x)-1} dx$. (5μ)

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f(x) = (e + 1)x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x \ln x + 2$, $x > 0$. Αν υλικό σημείο $A(x, f(x))$ κινείται κατά μήκος της C_f και υλικό σημείο $B(x, g(x))$ κινείται κατά μήκος της C_g τότε:

1. Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς μονοτονία και να αποδείξετε ότι ισχύει $g(x) \geq -e^{-1} + 2$ για $x > 0$. (5μ)
2. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει ακριβώς 2 ρίζες στο διάστημα $(0, 3)$. (7μ)
3. Αν ο ρυθμός αύξησης της τεταγμένης του σημείου B είναι $1/3$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του B κατά την χρονική στιγμή που η αντίστοιχη εφαπτομένη της g στο B είναι παράλληλη της ευθείας $y = 21x + 2025$. (6μ)
4. Να αποδείξετε ότι η απόσταση AB ελαχιστοποιείται για $x=1$. (7μ)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f(x) = 2x \ln x - x^2$ και $g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{2-x}$

1. Να βρεθούν τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων f και g . (6μ)
2. Α) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$: $f(x_0) = \frac{f(1)+f(e)}{2}$, (4μ)
B) Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, e)$: $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = \frac{2(e-1)}{1+2e-e^2}$. (6μ)

Αν επιπλέον δίνεται η πραγματική συνάρτηση $k: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ τότε:

3. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{1-k^2(x)} - \sqrt{2k^2(x)-1}}{f(x) \cdot k(x)} \right)$. (4μ)

1. ☒ Ζωγράφου: Ι.Χρυσίπτου 1, ☎ 210 7488030 & ΙΙ. Ξηρογιάννη 10, ☎ 210 7488180
2. ☒ Χολαργός: Φανερωμένης 13, ☎ 210 6536551
3. ☒ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση 9, πλατεία Αγ. Παρασκευής, ☎ 2106000031

4. Αν δίνεται ότι $k''(x) > 0$ για $x \in (1,5)$ να αποδείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση παρουσιάζει ακριβώς μία ρίζα για $x \in (1, +\infty)$:

$$2k(3) \cdot f(x) + \frac{k(2)+k(4)}{x} = 0. \quad (5\mu)$$

Καλή Χρονιά!!!