

1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
 Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
 Χολαργός, ☎ 210 65 36 551  
 www.en-dynamei.gr



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

28/07/2023

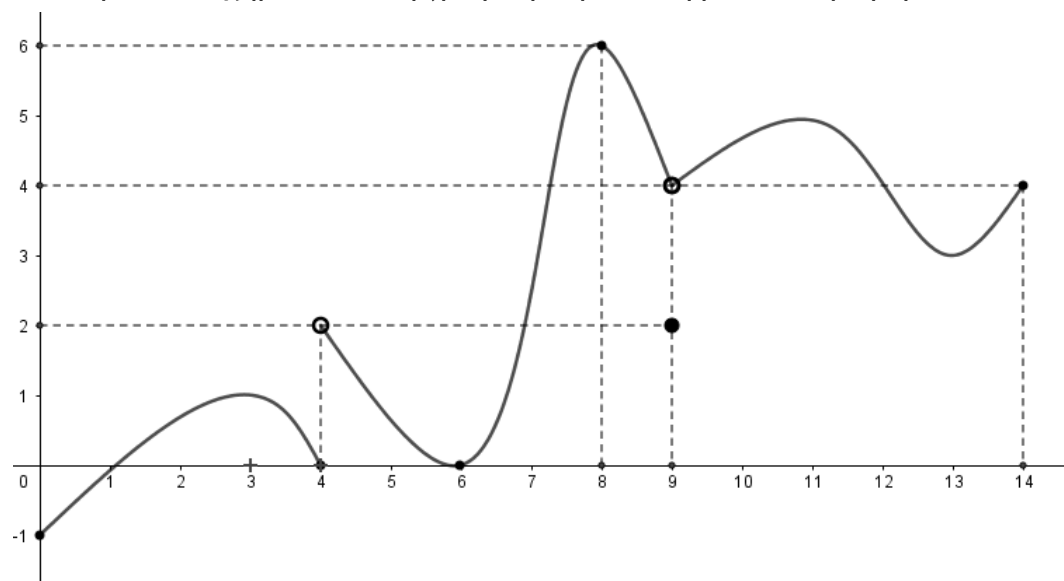
ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  καλείται συνεχής σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;
- A2.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f^{-1}$  και  $f$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$ .
- A3.** Να διατύπωσε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε της επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος
1. Δίνεται συνάρτηση  $f : [1, 2] \rightarrow (-1, 4)$ . Τότε το πεδίο ορισμού της είναι το  $[1, 2]$  και το σύνολο τιμών της το  $(-1, 4)$ .
  2. Ισχύει ότι  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ .
  3. Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$ .
  4. Για να ορίζεται η  $f \circ g$  πρέπει το σύνολο  $A_1 = \{x \in A_g / g(x) \in A_f\}$  να είναι διάφορο του κενού.
  5. Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό

(4 - 7 - 4 - 10)

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .



1. ☒ Ούλωφ Πάλμε & Επάφου & Χρυσίππου 1  
 Ζωγράφου, ☎ 210 74 88 030
2. ☒ Φανερωμένης 13  
 Χολαργός, ☎ 210 65 36 551  
 www.en-dynamei.gr



- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.  
**B2.** Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης. Έχει η συνάρτηση ολικά ακρότατα;  
**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
1.  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$     2.  $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$     3.  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$     4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$     5.  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-12}{6-f(x)}$ .
- B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, αιτιολογώντας την απάντησή σας.  
 (4 - 3 - 15 - 3)

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \ln(1 + e^x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.  
**Γ2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα  $(-1, 0)$ .  
**Γ3.** Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι η αντίστροφη είναι η
- $$f^{-1}(x) = \ln \left[ \sqrt{e^x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Γ4.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \mathbb{R}$  για το οποίο το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$  δεν υπάρχει.

**Γ5.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f^{-1}(x) + \eta \mu f^{-1}(x)]$ .

(3 - 5 - 5 - 6 - 6)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2 - 7x}{x^2 - 2x} = 2$ .

- Δ1.** Να δείξετε ότι  $f(0) = 0$ .  
**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε το  $f'(0)$ .  
**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$ .

Αν επιπλέον η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ , με σύνολο τιμών  $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$  τότε

**Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{e^{f(x)} - f(x)}{x} + \frac{f(x)}{x-a} = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, a)$ .

**Δ5.** Να λυθεί η εξίσωση  $f(e^{x^2} - 1) + f(|x| - |\eta \mu x|) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

(3 - 5 - 4 - 7 - 6)