ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘ. Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 22/3/25

A4) i) Λ ii) Λ iii) Λ iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ Β

B1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) \geq 0 \iff \ln x + 2 \geq 0 \iff \ln x \geq -2 \iff x \geq e^{-2}$

	0		e^{-2}	
f'		$-$		$+$
f		↘		↗

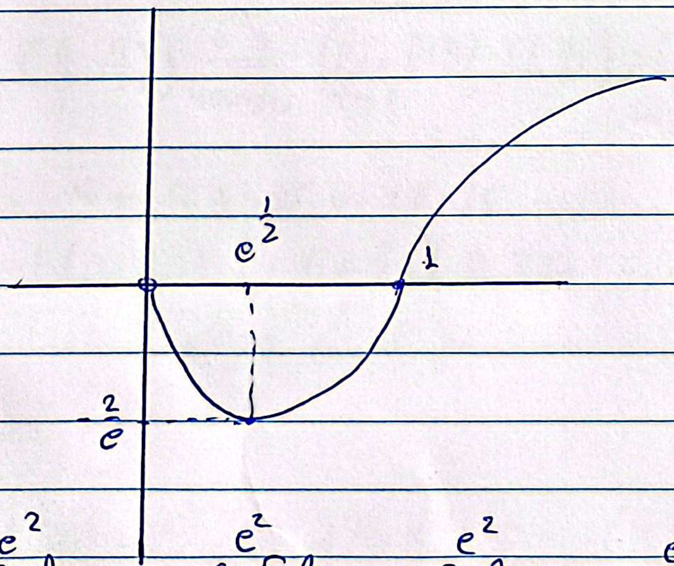
Ο.Ε. $f(e^{-2}) = -\frac{2}{e}$

B2) $f''(x) = \frac{\frac{1}{x} 2\sqrt{x} - (\ln x + 2)\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} - (\ln x + 2)\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{-\ln x}{\sqrt{x} \cdot 4 \cdot x}$

	0		1	
f''		$+$		$-$
f		∪		∩

Σ.Κ $f(1) = 0$

B3)



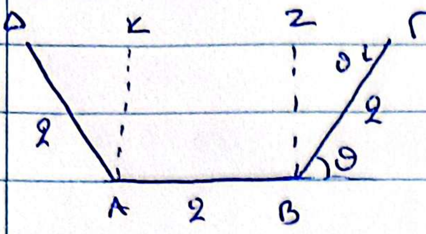
	0		e^{-2}		1		$+\infty$
f''		$+$		$+$		$-$	
f'		$-$		$+$		$+$	
f		↘		↗		↗	

B4) $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x} dx = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_1^{e^2} (2\sqrt{x})' \ln x \, dx = [2\sqrt{x} \ln x]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\sqrt{x} \frac{1}{x} dx =$

$4e - 2\int_1^{e^2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}^2} dx = 4e - 2\int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4e - 2[2\sqrt{x}]_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1)



Στο $B\hat{Z}\Gamma$: $ημθ = \frac{BZ}{B\Gamma} \Leftrightarrow BZ = 2ημθ$

$συνθ = \frac{Z\Gamma}{B\Gamma} \Leftrightarrow Z\Gamma = 2συνθ$

$A\hat{\Delta}K = B\hat{Z}\Gamma$ άρα $\Delta K = Z\Gamma$ επομένως $\Delta\Gamma = 2 + 2Z\Gamma = 2 + 4συνθ$

$E(θ) = \frac{2+4συνθ+2}{2} 2ημθ = 4ημθ(1+συνθ)$

Γ2) $E'(θ) = 4συνθ(1+συνθ) - 4ημ^2θ = 4συνθ + 4συν^2θ - 4 + 4συν^2θ =$

$8συν^2θ + 4συνθ - 4 = 4(2συν^2θ + συνθ - 1) = 4\cdot 2(συνθ+1)(συνθ - \frac{1}{2})$

$E'(θ) \geq 0 \Leftrightarrow 8(συνθ+1)(συνθ - \frac{1}{2}) \geq 0$

$συνθ+1 > 0 \ \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ } $\Rightarrow συνθ \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$συνθ \geq συν\frac{\pi}{3} \overset{συν↘}{\Leftrightarrow} θ \leq \frac{\pi}{3}$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\pi/2$
E'		+	0	−	
E		↗		↘	

$E(\frac{\pi}{3}) = 3\sqrt{3}$

(*)

Γ3) $E((0, \frac{\pi}{3}]) \xrightarrow[συνεχής]{E↗} (\lim_{θ\to0} E(θ), E(\frac{\pi}{3})] = (0, 3\sqrt{3}]$

$E([\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})) \xrightarrow[συνεχής]{E↘} (\lim_{θ\to\frac{\pi}{2}} E(θ), E(\frac{\pi}{3})] = (4, 3\sqrt{3}]$

$3\sqrt{3} > 5 \Leftrightarrow 9\cdot3 > 25 \Leftrightarrow 27 > 25$ ισχύει

$5 \in E((0, \frac{\pi}{3}])$ και $5 \in E([\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}))$ άρα η εξίσωση $E(θ) = 5$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες και E γν. μονότονη σε κάθε ένα από αυτά άρα οι ρίζες μοναδικές

(*) i) $E''(θ) = 16συνθ(-ημθ) - 4ημθ = -(16συνθ\cdotημθ + 4ημθ) < 0 \ \forall θ \in (0, \frac{\pi}{2})$

άρα $E \frown$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ4) Έστω G αρχική της E.

$\int_{E(\alpha)}^{6\sqrt{3}-E(\beta)} E(\theta)\,d\theta = 0 \Leftrightarrow \left[G(\theta)\right]_{E(\alpha)}^{6\sqrt{3}-E(\beta)} = 0 \Leftrightarrow G\left[6\sqrt{3}-E(\beta)\right] - G(E(\beta)) = 0 \Leftrightarrow$

$G\left[6\sqrt{3}-E(\beta)\right] = G(E(\beta))$

$G'(\theta) = E(\theta) > 0$ άρα $G \uparrow$ οπότε και 1-1

$\Rightarrow 6\sqrt{3} - E(\theta) = E(\beta) \Leftrightarrow$

$E(\beta) + E(\theta) = 6\sqrt{3}$

Από Γ2 είναι $E(\theta) \leq 3\sqrt{3}$ $\forall\ \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ άρα

$E(\alpha) + E(\beta) = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\underbrace{(3\sqrt{3} - E(\alpha))}_{\geq 0} + \underbrace{(3\sqrt{3} - E(\beta))}_{\geq 0} = 0$ άρα

από ο.μ. $E(\alpha) = 3\sqrt{3}$ και $E(\beta) = 3\sqrt{3}$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ και $\beta = \frac{\pi}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής

$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\sqrt{x_0}} = e^{\sqrt{x_0}} \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) \Leftrightarrow$

$y - e^{\sqrt{x_0}} = \dfrac{e^{\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}} x - \dfrac{e^{\sqrt{x_0}}\sqrt{x_0}}{2} \overset{K(-1,0) \in (\varepsilon)}{\Longleftrightarrow}$

$-e^{\sqrt{x_0}} = \dfrac{e^{\sqrt{x_0}}}{2\sqrt{x_0}}(-1) - \dfrac{e^{\sqrt{x_0}}\sqrt{x_0}}{2} \overset{e^{\sqrt{x_0}} \neq 0}{\Longleftrightarrow} -1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} - \dfrac{\sqrt{x_0}}{2} \Leftrightarrow$

$-2\sqrt{x_0} = -1 - \sqrt{x_0}\sqrt{x_0} \Leftrightarrow x_0 - 2\sqrt{x_0} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x_0} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$ άρα $M(1, e)$

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - e = \dfrac{e}{2}(x - 1) \Leftrightarrow y = \dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{2}$

Δ2) $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ άρα $f \nearrow$ επομένως η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ το $f(0) = 1$ $\left(A_f = [0, +\infty)\right)$

$f''(x) = \dfrac{(e^{\sqrt{x}})' 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}}(2\sqrt{x})'}{4x} = \ldots = \dfrac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)}{4x\sqrt{x}}$

$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

	0		1	
f''		$-$		$+$
f		$\frown$		$\smile$

Σ.Κ $f(1) = e$

Δ3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2e}{2f(x) - e(x+1)}$ $\quad \lim\limits_{x \to 1}(f(x) - 2e) = e - 2e = -e$

$\lim\limits_{x \to 1}(2f(x) - e(x+1)) = 0$

$2f(x) - e(x+1) = 2\left[f(x) - \dfrac{e}{2}(x+1)\right] = 2\left[f(x) - \left(\dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{2}\right)\right]$

$x > 1$: $f \cup$ και $y = \dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{2}$ η εφαπτομένη της άρα $f(x) \geq \dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{2}$

επομένως $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{f(x) - \left(\dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{2}\right)} = +\infty$

επομένως $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-2e}{2\left[f(x)-\left(\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}\right)\right]} = +\infty$

αντίστοιχα για $x<1$ είναι f ∪ άρα $f(x) \le \frac{e}{2}x+\frac{e}{2}$ άρα

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{f(x)-\left(\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}\right)} = -\infty \text{ και } \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-2e}{2\left[f(x)-\left(\frac{e}{2}x+\frac{e}{2}\right)\right]} = +\infty$$

τελικά δεν υπάρχει το όριο

14) i) $e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x = e^{\sqrt{x^2+1}} - e^{\sqrt{x^2}} = f(x^2+1) - f(x^2)$

$[x^2, x^2+1] \xrightarrow{\text{ΘΜΤ}} f'(\xi) = \frac{f(x^2+1)-f(x^2)}{x^2+1-x^2} = f(x^2+1)-f(x^2) = e^{\sqrt{x^2+1}} - e^{\sqrt{x^2}}$

f ∪ στο $[1,+\infty)$ άρα f' ↗

$\xi > x^2 \overset{f' \nearrow}{\Longleftrightarrow} f'(\xi) > f'(x^2) \Leftrightarrow e^{\sqrt{x^2+1}} - e^{\sqrt{x^2}} > \frac{e^{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{x^2}} \overset{x\geq 1}{\Leftrightarrow}$

$e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x > \frac{e^x}{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{\text{DLH}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$ και

$e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x > \frac{e^x}{x}$ άρα $\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+1}} - e^x\right) = +\infty$

ii) $E = \int_1^4 |f(x)|\,dx = \int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx$ Θέτω $\sqrt{x} = u \Leftrightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$x=1: u=1$, $x=4: u=2$

$E = \int_1^2 e^u 2u\,du = 2\left[e^u u\right]_1^2 - 2\int_1^2 e^u\,du = 2(2e^2-e) - 2\left[e^u\right]_1^2 =$

$4e^2 - 2e - 2e^2 + 2e = 2e^2$ τ.μ.