30/03/2025

Διαγώνισμα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

(Λύσεις)

Θέμα Α

A1

i) γ
ii) β
iii) γ

A2

1 → Α
2 → Δ
3 → Γ
4 → Β

A3

1) Λ
2) Λ
3) Λ
4) Σ

Θέμα Β

B1

i) $\Delta = (-2\beta)^2 - 4\cdot(\beta^2-4) = 4\beta^2 - 4\beta^2 + 16 = 16$

$$x_{1,2} = \frac{2\beta \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2(\beta+2)}{2} = \beta+2 \\ \frac{2(\beta-2)}{2} = \beta-2 \end{cases}$$

ii) Αφού $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\beta+\cancel{2}+\beta-\cancel{2}}{2} = \frac{2\beta}{2} = \beta$, τότε οι αριθμοί x_1, β, x_2 είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου

B_2 i) $a_{10} = a_1 + 9\omega$

$a_6 = a_1 + 5\omega$

Άρα $a_{10} - a_6 = 24 \Leftrightarrow a_1 + 9\omega - (a_1 + 5\omega) = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\omega = 24 \Leftrightarrow \omega = 6$

ii) $a_{20} = a_1 + 19\cdot\omega = 19 + 19\cdot 6 = 19\cdot 7 = 133$

iii) $S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10\cdot(19+133) = 1520$

Θέμα Γ

Γ_1 i) $x^2 - 4x - 5 < 0$

$\Delta = 16 + 20 = 36$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
x^2-4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in (-1, 5)$

ii) $-x^2 + 4x + 12 < 0$

$\Delta = 16 + 48 = 64$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		6		$+\infty$
$-x^2+4x+12$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $x \in (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

iii) $5x^2 \leq 20x$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 20x \leq 0$

$\Delta = 400$, $x_{1,2} = \frac{20 \pm 20}{10} = \begin{cases} 4 \\ 0 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$5x^2-20x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in [0, 4]$

iv) $x^4 - 10x^2 + 9 \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2)^2 - 10x^2 + 9 \geq 0$

Θετω $\omega = x^2$, εχω: $\omega^2 - 10\omega + 9 \geq 0$

$\Delta = 100 - 36 = 64$, $\omega_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$

ω	$-\infty$		1		9		$+\infty$
$\omega^2 - 10\omega + 9$		+	0	−	0	+	

Άρα $\omega \leq 1$ ή $\omega \geq 9$

οπότε $x^2 \leq 1$ ή $x^2 \geq 9$

$\Leftrightarrow |x| \leq 1$ ή $|x| \geq 3$

$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ ή $x \geq 3$ ή $x \leq -3$

Οπότε $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, +\infty)$

Γ_2

$2 + x - x^2 > 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$, $x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (-1, 2)$

$x^2 - x - \lambda^2 - \lambda < 0$

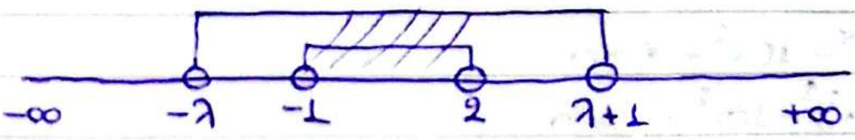
$\Delta = 1 - 4(-\lambda^2 - \lambda) = 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (2\lambda + 1)^2 > 0$ αφού $\lambda > 1$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm (2\lambda+1)}{2} = \begin{cases} \frac{1 + 2\lambda + 1}{2} = \frac{2(\lambda+1)}{2} = \lambda + 1, \text{ αφού } \lambda > 1 \Rightarrow \lambda + 1 > 2 \\ \frac{\cancel{1} - 2\lambda - \cancel{1}}{2} = -\lambda, \text{ αφού } \lambda > 1 \Rightarrow -\lambda < -1 \end{cases}$

x	$-\infty$		$-\lambda$		$\lambda+1$		$+\infty$
$x^2 - x - \lambda^2 - \lambda$		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (-\lambda, \lambda + 1)$

Συναληθεύοντας



$x \in (-1,2)$

Θέμα Δ

Δ1 Για να αληθεύει η ανίσωση για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει

$\Delta < 0$ και $\lambda - 1 < 0$

$\Leftrightarrow \lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4(\lambda-1)(2\lambda-3) < 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4(2\lambda^2 - 5\lambda + 3) < 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 12 < 0$

$\Leftrightarrow -7\lambda^2 + 20\lambda - 12 < 0$

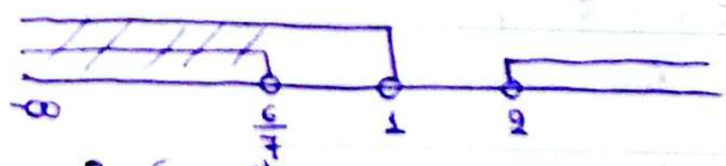
$\Delta' = 400 - 336 = 64$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-20 \pm 8}{-14} = \begin{cases} 2 \\ \frac{6}{7} \end{cases}$

λ	$-\infty$		$\frac{6}{7}$		2	
$-7\lambda^2+20\lambda-12$		$-$	0	$+$	0	$-$

$\lambda \in (-\infty, \frac{6}{7}) \cup (2, +\infty)$

Συναληθεύοντας



$\lambda \in (-\infty, \frac{6}{7})$

Δ2 i) $\Delta = (\lambda+3)^2 - 4\cdot(\lambda+6) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 - 4\lambda - 24 = \lambda^2 + 2\lambda - 15$

ii) Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 15 \geq 0$

$\Delta' = 4 + 60 = 64$, $\lambda_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$

λ	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$\lambda^2+2\lambda-15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $\lambda \in (-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$

iii) Αφού $(x_1+x_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S^2 = x_1^2+x_2^2+2P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2 = S^2-2P$

με $S = x_1+x_2 = -\frac{\beta}{a} = -\lambda-3$

και $P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{a} = \lambda+6$

Επομένως $x_1^2+x_2^2 < 42 \Leftrightarrow S^2-2P<42$

$\Leftrightarrow (-\lambda-3)^2-2(\lambda+6)<42$

$\Leftrightarrow \lambda^2+6\lambda+9-2\lambda-12-42<0$

$\Leftrightarrow \lambda^2+4\lambda-45<0$

$\Delta = 16+180 = 196$

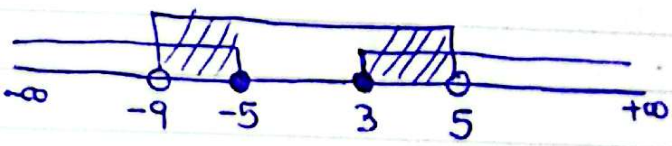
$\lambda_{1,2} = \frac{-4\pm14}{2} = \begin{cases} 5 \\ -9 \end{cases}$

λ	$-\infty$		-9		5		$+\infty$
$\lambda^2+4\lambda-45$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $\lambda\in(-9,5)$

Όμως για να έχει το τριώνυμο (1) ρίζες πραγματικές θα πρέπει (από ερώτημα Δ2 (ii)) $\lambda\in(-\infty,-5]\cup[3,+\infty)$

Συναληθεύοντας



$\lambda\in(-9,-5]\cup[3,5)$

Δ3) $\Delta = \left(\frac{2\lambda-1}{2}\cdot\mu\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{4}\cdot(2\lambda\mu-1) = \frac{(2\lambda-1)^2}{4}\cdot\mu^2 - 2\lambda\mu+1$

Αν θεωρήσουμε τη διακρίνουσα Δ ένα τριώνυμο με άγνωστο μ, τότε $\Delta' = (-2\lambda)^2 - 4\cdot\frac{(2\lambda-1)^2}{4}\cdot 1 = 4\lambda^2-(4\lambda^2-4\lambda+1) = 4\lambda-1<0$ διότι

$\lambda<\frac{1}{4}$ και αφού $\frac{(2\lambda-1)^2}{4}>0$, αφού $\lambda<\frac{1}{4}$, τότε το τριώνυμο $\Delta>0$ για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ και $\lambda<\frac{1}{4}$. Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.