Λύσεις διαγωνίσματος 6/4/2025

Θέμα Α: Α4) (α) Σ (β) Λ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Σ

Θέμα Β: Β1) $D_f = [0,14]$, $f(D_f) = [-1,6]$.

Β2) • $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$ ή $x = 6$

• για την $\frac{1}{f}$ πρέπει $\begin{cases} x \in D_f \text{ δηλ. } 0 \leq x \leq 14 \\ \text{και} \\ f(x) \neq 0 \text{ δηλ. } x \neq 1,4,6 \end{cases} \Rightarrow D_{\frac{1}{f}} = [0,1) \cup (1,4) \cup (4,6) \cup (6,14]$

Β3) • $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$ • $\lim\limits_{x \to 9} f(x) = 4$

• $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 4} f(x)$ • $\lim\limits_{x \to 14} f(x) = \lim\limits_{x \to 14^-} f(x) = 4$.

Β4) $f(x) = f(9) \Leftrightarrow f(x) = 2$ που έχει δύο ρίζες (όσα και τα σημεία τομής της C_f με την $y=2$)

Β5) $\lim\limits_{x \to 8} f(x) = 6$ άρα εμφανίζεται μορφή $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 8} \frac{f^2(x) - 7f(x) + 6}{f(x) - 6} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 8} \frac{(f(x)-6)(f(x)-1)}{\cancel{f(x)-6}} = 6 - 1 = 5.$$

Θέμα Γ: Γ1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{x-1} = 1$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ \downarrow & 1 & 1 & -1 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

και $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2\sqrt{x^2+3} - 4}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 1^+} 2 \cdot \frac{(\sqrt{x^2+3} - 2)(\sqrt{x^2+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} =$

$$= \lim_{x \to 1^+} 2 \cdot \frac{x^2 + 3 - 4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{2 \cdot (x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3} + 2)} = 1$$

Συνεπώς, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

Γ2) Από τον διπλανό πίνακα προσήμων φαίνεται ότι: $x^2-3x>0$ κοντά στο 3^+ και $x^2-3x<0$ κοντά στο 3^-.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|x^2-3x|+x^2-4x+3}{x^2-9}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3^-}\frac{-\cancel{x^2}+3x+\cancel{x^2}-4x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{\overset{-1}{\cancel{-x+3}}}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=-\frac{1}{6}$$

Ενώ

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{|x^2-3x|+x^2-4x+3}{x^2-9}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-3x+x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2x^2-7x+3}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2\cdot\cancel{(x-3)}(x-1/2)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\frac{5}{6}.$$

Οπότε, το αρχικό όριο δεν υπάρχει.

Γ3) Θέτουμε $h(x)=\dfrac{g(x)+x-5}{x^2-4}$, για x κοντά στο 2. Τότε $\lim\limits_{x\to 2}h(x)=2$.

(α) Για x κοντά στο 2:

$g(x)=h(x)\cdot(x^2-4)-x+5$, άρα το $\lim\limits_{x\to 2}g(x)$ υπάρχει και:

$$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot(x^2-4)-x+5\right)=2\cdot 0-2+5=3.$$

(β)
$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)\cdot(x^2-4)-x+5-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{h(x)\cdot\cancel{(x-2)}(x+2)-\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$=2\cdot(2+2)-1=7$$

(γ) Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\left(g^2(x)-3\right)\overset{(\alpha)}{=}3^2-3=6>0$, είναι $g^2(x)-3>0$ κοντά στο 2. Άρα:

$$\lim_{x\to 2}\frac{|g^2(x)-3|-2g(x)}{x^2-6x+8}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{g^2(x)-3-2g(x)}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(g(x)-3)(g(x)+1)}{(x-2)(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{g(x)-3}{x-2}\cdot\frac{g(x)+1}{x-4}\right)\underset{(\alpha)}{\overset{(\beta)}{=}}7\cdot\frac{3+1}{2-4}=-14.$$

Θέμα Δ: Δ1) (α) $A(-1,1) \in C_f \Leftrightarrow f(-1)=1 \Leftrightarrow \dfrac{-\alpha-7}{-\alpha^3-1} = 1 \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha-6=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -6 & 2 \\ \downarrow & 2 & 4 & 6 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$\Leftrightarrow (\alpha-2)\underbrace{(\alpha^2+2\alpha+3)}_{\neq 0 \ (\Delta<0)} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha=2}$

Άρα: $f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^3-8}$ και πρέπει $x^3 \neq 8 \Leftrightarrow x \neq 2$, άρα $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$.

(β) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \dfrac{6}{4+4+4} = \dfrac{1}{2}$.

(γ) Λύνουμε την $f(x) > 1$ <u>περιορισμοί</u>: $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 2$.

$f(x)>1 \Leftrightarrow \dfrac{x+4}{x^2+2x+4} > 1 \overset{x^2+2x+4>0}{\Longleftrightarrow} x+4 > x^2+2x+4 \Leftrightarrow x^2+x<0 \Leftrightarrow -1<x<0$

Δ2) (α) <u>για την f</u>: πρέπει $4x-x^3 \neq 0 \Leftrightarrow x\cdot(4-x^2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq \pm 2$
δηλ. $D_f = \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$.

<u>για την g</u>: πρέπει $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$
δηλ. $D_g = [-2,2]$.

<u>Για την $f \cdot g$</u>: πρέπει $x \in D_f \cap D_g$ δηλ. $D_{f\cdot g} = (-2,0)\cup(0,2)$ και $\forall x \in D_{f\cdot g}$:

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{4x-x^3} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x\cdot(4-x^2)} = \frac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$$

<u>Για την h</u>: πρέπει $4x^2-x^4>0 \Leftrightarrow x^2(4-x^2)>0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x^2<4 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $-2<x<2$
δηλ. $D_h = (-2,0)\cup(0,2)$ και $\forall x \in D_h$:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2(4-x^2)}} = \frac{1}{|x|\sqrt{4-x^2}}.$$

Οπότε, είναι $D_{f\cdot g} = D_h = A$ αλλά <u>δεν</u> ισχύει ότι $(f\cdot g)(x) = h(x)$ $\forall x \in A$.

(στο $(0,2)$ όμως ισχύει $|x| = x$ και άρα $f\cdot g = h$ στο $(0,2)$)

(β) $\forall x \in D_h = (-2,0)\cup(0,2)$:

$$(x^2-2)^2 \geq 0 \rightarrow x^4-4x^2+4 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2-x^4 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-x^4} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2-x^4}} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow h(x) \geq \frac{1}{2},$$

όπου η τελευταία ισότητα – λόγω ισοδυναμίας – ισχύει, όποτε ισχύει και η ισότητα στην αρχική ανισότητα, δηλ. για $x = \pm\sqrt{2}$. Παρατηρούμε ότι:

$$2h(x) \geq 1 \quad \text{και} \quad \text{συν}x \leq 1 \quad \forall x \in D_h,$$

οπότε για να είναι $2h(x) = \text{συν}x$, πρέπει αναγκαστικά:

$$\begin{cases} 2h(x) = 1 \\ \text{και} \\ \text{συν}x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ \text{και} \\ x = 2\kappa\pi \ (\kappa \in \mathbb{Z}) \end{cases} \qquad \underline{\underline{\text{αδύνατο}}}$$

Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.