Λύσεις Διαγωνίσματος

Μαθηματικών Γ. ΛΥΚΕΙΟΥ
26 - 4 - 2025

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. Η σωστή γραφική παράσταση είναι η (3)
Μέχρι τα μέσα περίπου του δοχείου η διάμετρος αυξάνεται με αποτέλεσμα ο ρυθμός αύξησης του ύψους να ελαττώνεται (κοίλη) στο δεύτερο μισό του δοχείου καθώς η διάμετρος ελαττώνεται ο ρυθμός αύξησης του δοχείου αυξάνεται (κυρτή). Στο τελικό στάδιο καθώς η διατομή του δοχείου είναι σταθερή έχουμε αύξηση του ύψους με σταθερό ρυθμό.

Δ. 1. Σωστό
2. Λάθος
3. Λάθος
4. Σωστό
5. Λάθος.

ΘΕΜΑ 2ο

1. $f(x) = \dfrac{12}{x^2+3}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{-12}{(x^2+3)^2} \cdot 2x = \frac{-24x}{(x^2+3)^2}$$

x		0	
$-24x$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$f \uparrow (-\infty, 0]$

$f \downarrow [0, +\infty)$

ολ. μέγιστο $f(0) = 4$

$$f''(x) = \frac{-24 \cdot (x^2+3)^2 - (-24x) \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{24\cancel{(x^2+3)}\left[-x^2-3+4x^2\right]}{(x^2+3)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''(x) = \frac{24 \cdot 3(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = \frac{72(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	0	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$f \cup$ στα δ/τα: $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$

$f \cap$ στο $[-1, 1]$

Σημεία καμπής $(-1, 3)$ και $(1, 3)$

2. Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{12}{x^2+3} = 0$$

οπότε $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{12}{x^2+3} = 0$$

οπότε $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

3. $g(x) = \sqrt{x-1} - 1$, $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 1}$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 \Rightarrow g \uparrow \Rightarrow g$: "1-1"

έστω $g(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - 1 = y \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = y+1$

τότε $x-1 = (y+1)^2 \Leftrightarrow \boxed{x = y^2+2y+2}$ $\quad (y+1 \geq 0)$

$A = [1,+\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{g \uparrow} g(A) = [g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x))$

$g(A) = [-1, +\infty) = A_{g^{-1}}$

$g^{-1}(x) = x^2 + 2x + 2$, $x \geq -1$

4. Αρκεί η εξίσωση $f(x) = g^{-1}(x)$ να παρουσιάζει 1 τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$

έστω $h(x) = f(x) - g^{-1}(x) = \frac{12}{x^2+3} - x^2 - 2x - 2$

Η h συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=2 \\ h(1)=-2 \end{array}\right\} h(0)\cdot h(1)<0$$

Απο Θ.Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$: $h(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)=g^{-1}(x_0)$.

ΘΕΜΑ 3ο

1. $\int_1^0 (xg(x))'\eta\mu^2x\,dx=-\kappa$

$\Leftrightarrow -\int_0^1 (xg(x))'\eta\mu^2x\,dx=-\kappa$

$\Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 (xg(x))'\eta\mu^2x\,dx=\kappa}$ (1)

Απο υπόθεση $\boxed{\int_0^1 (xg(x))'\sigma\upsilon\nu^2x\,dx=e-\kappa}$ (2)

Απο (1) + (2) $\Rightarrow \int_0^1 (xg(x))'\eta\mu^2x+(xg(x))'\sigma\upsilon\nu^2x\,dx=e$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (xg(x))'(\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu^2x)\,dx=e$

$\Leftrightarrow \int_0^1 (xg(x))'dx=e \Leftrightarrow [xg(x)]_0^1=e$

$\Leftrightarrow g(1)-0=e \Leftrightarrow \boxed{g(1)=e}$

$$h'(x)=\left(\frac{g'(x)}{e^{x^2}}-2x\right)'=\frac{g''(x)\cdot e^{x^2}-g'(x)\cdot e^{x^2}\cdot 2x}{(e^{x^2})^2}-2$$

$$=\frac{g''(x)-2x\cdot g'(x)}{e^{x^2}}-2=\frac{2\cancel{e^{x^2}}}{\cancel{e^{x^2}}}-2=0$$

οπότε η h σταθερή.

2. Απο το 1. η h σταθερή οποτε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = c \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{e^{x^2}} - 2x = c \xrightarrow{x=1} c = 0$$

άρα $\dfrac{g'(x)}{e^{x^2}} = 2x \Leftrightarrow g'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

$\Leftrightarrow g'(x) = (e^{x^2})'$ απο συνέπεια Θ.Μ.Τ

υπάρχει $c \in \mathbb{R}$: $g(x) = e^{x^2} + c \xrightarrow[x=1]{g(1)=e} c=0$

οπότε $\boxed{g(x) = e^{x^2}}$

Αν εφ. $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \xrightarrow[y=0]{x=0}$

$$0 - \cancel{e^{x_0^2}} = \cancel{e^{x_0^2}} \cdot 2x_0 (0 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$-1 = -2x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = 1/2 \Leftrightarrow x_0 = \pm \sqrt{2}/2$$

ε_1: $y - g(+\sqrt{2}/2) = g'(\sqrt{2}/2)(x - \sqrt{2}/2)$

$$y - e^{1/2} = e^{1/2} \cdot \sqrt{2}\,(x - \sqrt{2}/2) \Leftrightarrow$$

$$y - \sqrt{e} = \sqrt{2e}\, x - \sqrt{e} \Leftrightarrow \boxed{y = \sqrt{2e}\, x}$$

ε_2: $y - g(-\sqrt{2}/2) = g'(-\sqrt{2}/2)(x + \sqrt{2}/2)$

$$\Leftrightarrow y - \sqrt{e} = \sqrt{e} \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2}/2)$$

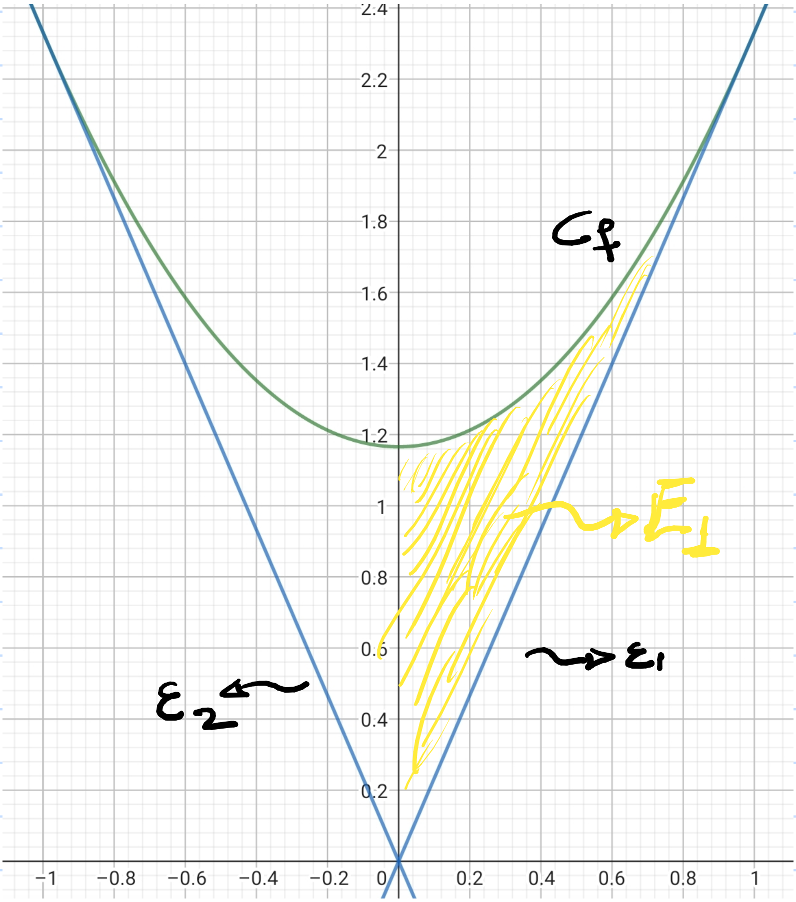
$$\Leftrightarrow \boxed{y = -\sqrt{2e} \cdot x}$$

3. $f(x)=\sqrt{\frac{e}{2}}\,(x^2+1)$

$\varepsilon\varphi_1: y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y-2\sqrt{\frac{e}{2}}=2\sqrt{\frac{e}{2}}(x-1)$

$\Leftrightarrow y=2\sqrt{\frac{e}{2}}\,x \Leftrightarrow y=\sqrt{\frac{4e}{2}}\,x \Leftrightarrow \boxed{y=\sqrt{2e}\cdot x} \to \varepsilon_1$

$\varepsilon\varphi_2: y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \boxed{y=-\sqrt{2e}\,x} \to \varepsilon_2.$



Η f ↺ και άρτια, λόγω συμμετρίας

$E=2E_1=2\int_0^1 |f(x)-\varepsilon_1|\,dx \overset{f\,\circlearrowleft}{=\!=}$

$2\int_0^1\left(\sqrt{\frac{e}{2}}(x^2+1)-\sqrt{2e}\cdot x\right)dx=$

$$= 2\left[\sqrt{\frac{e}{2}}\left(\frac{x^3}{3}+x\right) - \sqrt{2e}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1 =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{e}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{2e}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(\frac{2}{3}\sqrt{2e} - \frac{1}{2}\sqrt{2e}\right) = 2\cdot\frac{1}{6}\sqrt{2e} = \frac{\sqrt{2e}}{3}$$

4. $g(x) = e^{x^2}$, $g'(x) = 2xe^{x^2}$

$$g''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2\cdot e^{x^2} > 0 \Rightarrow g \cup$$

οπότε $E = \int_0^1 |g(x) - (ax+b)|\,dx$

$$\underset{\overline{\overline{g\cup}}}{} \int_0^1 (g(x) - ax - b)\,dx \;\underset{\text{αρχική της } g(x)}{\overset{\text{έστω } G(x)}{=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= \left[G(x) - \frac{ax^2}{2} - bx\right]_0^1 =$$

$$= G(1) - G(0) - \frac{a}{2} - b$$

Από υπόθεση: $E = \frac{a}{2} \Leftrightarrow \boxed{G(1) - G(0) = a + b}$ (*)

Η $G(x)$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0,1]$

υπάρχει $\xi \in (0,1)$: $G'(\xi) = \frac{G(1)-G(0)}{1-0}$

$$\Leftrightarrow g(\xi) = G(1) - G(0) \overset{(*)}{\Longrightarrow} \boxed{g(\xi) = a + b}$$

ΘΕΜΑ 4ο

1. έστω $h(x) = \ln x - \frac{2}{x} + 2, \ x>0$

$h(1)=0$ και $h'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0 \Rightarrow h \uparrow$

οπότε $x=1$ μοναδική ρίζα.

2. Από υπόθεση $g(x)=f(x)+2x$ γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. και αφού είναι παραγωγίσιμη: $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x)+2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x\ln x - 2\theta \ln x + x - 3 + 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow x\ln x - 2\theta \ln x + x - 1 \geq 0$

Αν $k(x) = x\ln x - 2\theta \ln x + x - 1 \ , x>0$

$k(1)=0$ και $k(x) \geq 0$ οπότε $k(x) \geq k(1)$

$k(1)$ ελάχιστο, $x=1$ εσωτερικό του Π.Ο. και η k παραγ/μη για $x=1$.

Από θ. Fermat $k'(1)=0$

$k'(x) = \ln x + 1 - \frac{2\theta}{x} + 1 \overset{x=1}{\Longrightarrow} 2 - 2\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\theta = 1}$

3. $f'(x) = x\ln x - 2\ln x + x - 3$, $x>0$.

$f''(x) = \ln x + 1 - \frac{2}{x} + 1 = \ln x - \frac{2}{x} + 2$

$f''(x) = h(x)$ ↑ απο το (1.)

Για $x>1 \overset{f''\uparrow}{\Longleftrightarrow} f''(x) > f''(1) = 0 \Rightarrow f'(x)$ ↑

Για $x<1 \overset{f''\uparrow}{\Longleftrightarrow} f''(x) < f''(1) = 0 \Rightarrow f'(x)$ ↓

$A_1 = (0,1] \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f'(x)\downarrow} f'(A_1) = [f'(1), \lim_{x\to 0^+} f'(x))$

$$\boxed{f'(A_1) = [-2, +\infty)}$$

• $\lim_{x\to 0^+} (x\ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \overset{\infty/\infty}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$

$= \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

οπότε $\lim_{x\to 0^+} (x\ln x - 2\ln x + x - 3) = +\infty$

$A_2 = [1,+\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f'\uparrow} f'(A_2) = [f'(1), \lim_{x\to+\infty} f'(x))$

$$\boxed{f'(A_2) = [-2, +\infty)}$$

• $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \left((x-2)\ln x + x - 3\right) = +\infty$

$0 \in f'(A_1), f'(A_2)$ όπου $f'\downarrow A_1$, $f'\uparrow A_2$ οπότε $\exists$ μοναδικά $x_1 \in A_1$ και $x_2 \in A_2$: $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$

Στο A_1 η $f'\downarrow$: $\begin{cases} x > x_1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0 \\ x < x_1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_2) = 0 \end{cases}$

Στο A_2 η $f'\uparrow$: $\begin{cases} x > x_2 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_2) = 0 \\ x < x_2 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_2) = 0 \end{cases}$

x	0	x_1	1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ $-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Τοπικό μέγιστο το $f(x_1)$ και τοπικό ελάχιστο το $f(x_2)$.

4. $f'(x_1)=0 \Leftrightarrow (x_1-2)\ln x_1 + x_1 - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{(x_1-2)\ln x_1 = 3-x_1}$ (1)

Έστω $M(x)=(x-2)\ln x - x - 1$.

$M(x)$ συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών.
$M(x_1)=(x_1-2)\ln x_1 - x_1 - 1 \overset{(1)}{=} 2-2x_1 = 2(1-x_1)$

όμως $0<x_1<1 \Rightarrow 1-x_1>0$: $\boxed{M(x_1)>0}$

$\boxed{M(1)=-2<0}$ οπότε $M(x_1)\cdot M(1)<0$

$M'(x)=\ln x + \frac{x-2}{x} - 1 = \ln x - \frac{2}{x} < 0$ στο $[x_1,1]$

Άρα $M(x)\downarrow$ οπότε η εξίσωση παρουσιάζει μοναδική ρίζα στο $(x_1,1)$.

5. Ισχύει $f'(x_1)=0 \Leftrightarrow (x_1-2)\ln x_1 + x_1 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x_1-2)\ln x_1 = 3-x_1 \overset{x_1\in(0,1)}{\Leftrightarrow} \ln x_1 = \frac{3-x_1}{x_1-2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = e^{\frac{3-x_1}{x_1-2}}} \quad (*)$$

Η εξίσωση

$$\frac{1}{8}\left[L(2x+2025) - L\left(x_1 - e^{\frac{3-x_1}{x_1-2}} + x + 2073\right)\right] = 48 - x$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{1}{8}\left[L(2x+2025) - L(\cancel{x_1}-\cancel{x_1}+x+2073)\right] = 48-x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}L(2x+2025) - \frac{1}{8}L(x+2073) = 48-x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{8}L(2x+2025) + 2x + 2025 = \frac{1}{8}L(x+2073) + x + 2073}$$

Αν $P(x) = \frac{1}{8}L(x) + x$

$$P'(x) = \frac{1}{8}L'(x) + 1$$

$$P'(x) = \frac{1}{8}(f')^3(x) + 1$$

όμως $f'(x) \geq -2$ (από 1.)

$$\Leftrightarrow (f'(x))^3 \geq -8 \Leftrightarrow \frac{1}{8}(f'(x))^3 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow P'(x) \geq 0 \text{ (με διακεκριμένη ρίζα)}$$

Οπότε $P(x)$ γν. αύξουσα και "1-1"

Άρα η ζητούμενη εξίσωση

$$P(2x+2025) = P(x+2073)$$

$\overset{P(x)\ \text{"1-1"}}{\Longleftrightarrow}$ $2x+2025 = x+2073$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 48}$