

Διαγώνισμα Β' Λυκείου Μαθηματικά 6/4/2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ;

A2. Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

A3. Να αποδείξετε ότι για κάθε πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$, όπου $x_0 \in \mathbb{R}$.

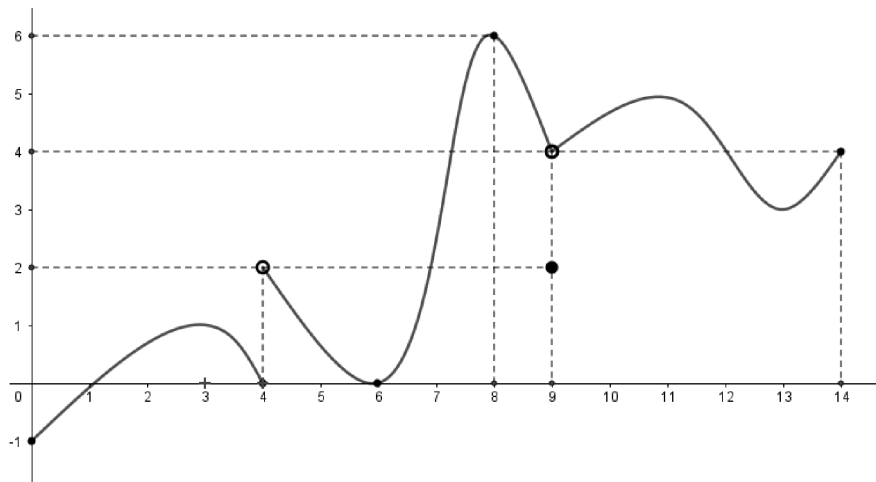
A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

- (α) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
- (β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$.
- (γ) Οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2 \ln x$ είναι ίσες.
- (δ) Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, τότε το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.
- (ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ για κάθε x κοντά στο x_0 .

Μονάδες 4 – 4 – 7 – 10

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f :



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B2. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{f}$.

B3. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 4} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 9} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 14} f(x)$$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν, να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = f(9)$.

B5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{f^2(x) - 7f(x) + 6}{f(x) - 6}$.

Μονάδες 4 – 5 – 8 – 3 – 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x + 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{2\sqrt{x^2 + 3} - 4}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}.$$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, αν υπάρχει.

Γ2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x^2 - 3x| + x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$.

Γ3. Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + x - 5}{x^2 - 4} = 2$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - 3}{x - 2}$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|g^2(x) - 3| - 2g(x)}{x^2 - 6x + 8}$

Μονάδες 6 – 4 – 15

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x - 8}{x^3 - \alpha^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 1)$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

(γ) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 1$.

Δ2. Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{4x - x^3} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

(α) Να ορίσετε την $f \cdot g$ και να εξετάσετε αν είναι ίση με τη συνάρτηση $h(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$.

(β) Να αποδείξετε ότι $h(x) \geq \frac{1}{2}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της h . Έπειτα, να λύσετε την εξίσωση $2h(x) = \sin x$.

Μονάδες 4 – 4 – 7 – 7 – 3