

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2025**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

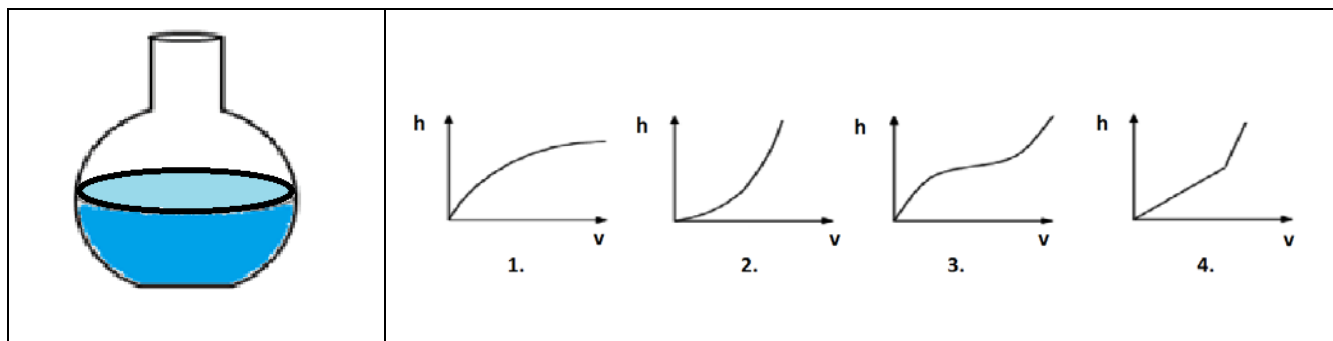
**A)** Να διατυπώσετε τον κανόνα De l'Hospital για απροσδιοριστία της μορφής  $0/0$ .

(5μ)

**B)** Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο  $x_0$  στο οποίο όμως είναι συνεχής και η  $f'$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$  τότε το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .

(6μ)

**Γ)** Φανταστείτε πως το δοχείο γεμίζει με νερό. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση ύψους ( $h$ ) ως προς τον όγκο ( $v$ ) ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(1+3μ)

**Δ)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Αν  $f, g$  δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της συνάρτησης  $f$  με την  $g$  ορίζεται όταν  $f(A) \cap B \neq \emptyset$ .
2. Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\beta)$  μέγιστη τιμή της συνάρτησης, τότε κατ' ανάγκη θα είναι  $f'(\beta) = 0$ .
3. Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Αν η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$  ή αντιστρόφως, τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .
4. Αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση δεν είναι 1-1 τότε θα υπάρχει διάστημα στο οποίο θα ικανοποιείται το θεώρημα Rolle.
5. Όταν ένα σώμα κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο  $t_0$  είναι  $u(t_0) > 0$ .

(10μ)

## ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις  $f(x) = \frac{12}{x^2+3}$  και  $g(x) = \sqrt{x-1} - 1$  τότε:

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς μονοτονία και κυρτότητα (8μ)
2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης  $f$ . (4μ)
3. Να αποδείξετε ότι η  $g$  είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφη της  $g^{-1}$ . (8μ)
4. Αν  $g^{-1}(x) = x^2 + 2x + 2, x \geq -1$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο τομής των  $C_f, C_{g^{-1}}$  στο διάστημα  $(0,1)$ . (5μ)

## ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν :

- $2x \cdot g'(x) + 2e^{x^2} = g''(x)$  για  $x \in \mathbb{R}$ , με  $g'(1) = 2e$ .
- $\int_1^0 ((xg(x))' \cdot \eta \mu^2 x) dx = -\kappa, \int_0^1 ((xg(x))' \cdot \sigma \nu^2 x) dx = e - \kappa$

1. Να αποδείξετε ότι  $g(1) = e$  και ότι η συνάρτηση  $h(x) = \frac{g'(x)}{e^{x^2}} - 2x$  είναι σταθερή. (3+3μ)
2. Να αποδείξετε ότι  $g(x) = e^{x^2}$  και να προσδιορίσετε τις εφαπτόμενες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  της  $C_g$  που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (3+3μ)
3. Να αποδείξετε ότι  $\varepsilon_1: y = \sqrt{2}ex, \varepsilon_2: y = -\sqrt{2}ex$  του προηγούμενου ερωτήματος είναι εφαπτόμενες και της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{\frac{e}{2}}(x^2 + 1)$  στα σημεία  $A(1, f(1))$  και  $B(-1, f(-1))$  αντίστοιχα και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ  $C_f$  και των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . (2+6μ)
4. Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ  $C_g$  και της εφαπτομένης  $y = \alpha x + \beta$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$  στο διάστημα  $[0,1]$  είναι ίσο με  $\alpha/2$  τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0,1)$  τέτοιο ώστε :  $g(\xi) = \alpha + \beta$ . (5μ)

## **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  όπου  $f'(x) = x \ln x - 2\beta \ln x + x - 3$  με  $\beta \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = f(x) + 2x$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

1. Να λυθεί η εξίσωση  $\ln x = \frac{2}{x} - 2$  στο  $(0, +\infty)$ . (4μ)
2. Να αποδειχθεί ότι  $\beta = 1$ . (5μ)
3. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο για  $x = x_1 \in (0, 1)$  και ένα τοπικό ελάχιστο για  $x = x_2 \in (1, +\infty)$ . (6μ)
4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(x - 2)\ln x = x + 1$  παρουσιάζει μία ακριβώς ρίζα στο  $(x_1, 1)$ . (5μ)
5. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{1}{8} \left( L(2x + 2025) - L(x_1 - e^{\frac{3-x_1}{x_1-2}} + x + 2073) \right) = 48 - x$  για  $x > 0$  όπου  $L(x)$  παράγουσα της  $(f')^3(x)$ . (5μ)