ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 25/7/2025

Α4) i) Σ ii) Λ iii) Λ iv) Λ v) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) $A_{f\circ g}=\{x\in A_g / g(x)\in A_f\}=\{x\in\mathbb{R} / e^x>1\}=\{x\in\mathbb{R} / e^x>e^0\}=$

$=\{x\in\mathbb{R} / x>0\}=(0,+\infty)\neq\emptyset$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

Β2) $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Leftrightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Leftrightarrow e^{x_1}e^{x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1}e^{x_2}+2e^{x_1}-e^{x_2}-2\Leftrightarrow$

$3e^{x_2}=3e^{x_1}\Leftrightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\overset{e^x}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}} x_1=x_2$ άρα $f\circ g$ 1-1

$y=(f\circ g)(x)\Leftrightarrow y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow ye^x-e^x=y+2\Leftrightarrow$

$e^x(y-1)=y+2\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} e^x=\dfrac{y+2}{y-1}$

Πρέπει $\dfrac{y+2}{y-1}>0\Leftrightarrow (y+2)(y-1)>0$

	-2		1	
$+$		$-$		$+$

$y<-2$ ή $y>1$

$\Rightarrow x=\ln\dfrac{y+2}{y-1}$

Πρέπει $x>0\Leftrightarrow \ln\dfrac{y+2}{y-1}>0\Leftrightarrow$

$\ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)>\ln 1\overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{y+2}{y-1}>1\Leftrightarrow \dfrac{y+2}{y-1}-1>0\Leftrightarrow$

$\dfrac{y+2-y+1}{y-1}>0\Leftrightarrow \dfrac{3}{y-1}>0\Leftrightarrow y-1>0\Leftrightarrow y>1$

άρα $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\dfrac{x+2}{x-1},\quad x>1$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

B3) i) $\phi'(x) = \dfrac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)' = \dfrac{x-1}{x+2} \, \dfrac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2} \, \dfrac{x-1}{x+2} =$

$= \dfrac{-3}{(x-1)(x+2)}$

$\phi''(x) = 3\dfrac{\left((x-1)(x+2)\right)'}{\left((x-1)(x+2)\right)^2} = 3 \, \dfrac{x+2+x-1}{\left((x-1)(x+2)\right)^2} = 3\,\dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x+2)^2}$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} \phi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

Θέτω $\dfrac{x+2}{x-1} = u$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+2)\dfrac{1}{x-1} = +\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$ κ' $x-1>0$ δεξιά του 1 άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to 1^+} \phi(x) = \lim\limits_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \phi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$

Θέτω $\dfrac{x+2}{x-1} = \omega$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x} = 1$ άρα $\omega \to 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \phi(x) = \lim\limits_{\omega\to +\infty} \ln\omega = \ln 1 = 0$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Γ}}$

Γ1) Έστω $h(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ στο $[1, e]$

h συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά συνεχών

$\left.\begin{array}{l} h(1) = -1 \\ h(e) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0 \end{array}\right\} h(1)\cdot h(e) < 0$ από Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τ.ω $h(x_0) = 0$

Πρέπει η $f(x)=g(x)$ να έχει ακριβώς 1 ρίζα δηλαδή

$\ln x = \frac{1}{x} \iff \ln x - \frac{1}{x} = 0 \iff h(x)=0$

Από Γ1 η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1,e)$

Έστω $x_1, x_2 \in A_h$ με $x_1 < x_2 \overset{\ln x \uparrow}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \ln x_1 < \ln x_2 \\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \iff -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{array} \right\} \oplus$

$h(x_1) < h(x_2)$ άρα $h \uparrow$ επομένως η ρίζα μοναδική

άρα C_f και C_g έχουν ακριβώς 1 κοινό σημείο

Γ3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(2^{-x}+3^{-x}+1) = \lim\limits_{u \to 1} f(u) = \ln 1 = 0$, γιατί:

Θέτω $2^{-x}+3^{-x}+1 = u$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2^{-x}+3^{-x}+1) = 0+0+1 = 1$ άρα $u \to 1$

Γ4) $\ln x_0 = \frac{1}{x_0} \iff x_0 \ln x_0 = 1 \iff \ln x_0^{x_0} = 1 \iff \ln x_0^{x_0} = \ln e \underset{1}{\iff} x_0^{x_0} = e$ ①

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^x - e}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^x - x_0^{x_0}}{x - x_0} = q'(x_0)$ για τη συνάρτηση $q(x) = x^x$

$q(x) = x^x = e^{x\ln x}$, $q'(x) = e^{x\ln x} \cdot (x\ln x)' = x^x(\ln x + 1)$

άρα $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^x - e}{x - x_0} = x_0^{x_0}(\ln x_0 + 1) \overset{①}{\underset{Γ1}{=}} e\left(\frac{1}{x_0}+1\right) = e\left(\frac{1+x_0}{x_0}\right)$

Γ2) $h(x) = \ln x + x$ με $h \uparrow$

Αν $x > 0$: $h^{-1}(x) \geq x \overset{h\uparrow}{\iff} x \geq h(x) \iff x \geq \ln x + x \iff \ln x \leq 0 \iff$

$\ln x \leq \ln 1 \iff x \leq 1$ άρα $x \in (0, 1]$

Αν $x \leq 0$: $h^{-1}(x) > 0$ και $x \leq 0$ άρα $h^{-1}(x) \geq x$ ισχύει

$\hookrightarrow A_f = (0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1)
$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+\eta\mu x) = 0 \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(e^x\cdot \eta\mu x) = 0 \\ &f(0) = e^0\cdot \eta\mu 0 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ συνεχής στο } 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(x+\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0+1 = 1 \\ &\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x} = 1\cdot 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{f'(0)=1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Δ2) Για $x<0$: $f'(x) = (x^2+\eta\mu x)' = 2x+\sigma\upsilon\nu x$

Δ3) Για $x>0$: $f'(x) = (e^x\eta\mu x)' = e^x\eta\mu x + e^x\sigma\upsilon\nu x = e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

$$\left.\begin{aligned} &f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0 \overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow} \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \\ &\text{Αν } \sigma\upsilon\nu x=0 \Rightarrow \eta\mu x=0 \text{ άτοπο γιατί } \eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}$$

$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$, $\kappa\in\mathbb{Z}$

$0\le x\le \pi \Leftrightarrow 0\le \kappa\pi+\frac{3\pi}{4}\le\pi \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4}\le\kappa\pi\le\pi-\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{4}\le\kappa\pi\le\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{3}{4}\le\kappa\le\frac{1}{4} \\ &\kappa\in\mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \kappa=0 \quad \text{άρα } x=\frac{3\pi}{4}$$

Δ4) i) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{f(x-1)}{x-1}\cdot\frac{1}{x+1}\right] = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, γιατί

- $\lim_{x\to 1}\frac{f(x-1)}{x-1} \xrightarrow[\substack{x\to 1\\ u\to 0}]{x-1=u} \lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u} = f'(0) = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right] = 1\cdot 1 = 1$, γιατί

$\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \overset{\eta\mu x = u}{\underset{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

iii) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h^2+\eta\mu h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}}{h+\frac{\eta\mu h}{h}} = \frac{f'(1)}{0+1} = f'(1)$, γιατί

$\cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$

$\cdot \lim\limits_{h\to 0} \left(h+\frac{\eta\mu h}{h}\right) = 0+1 = 1$

15) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+\eta\mu x) = +\infty$, γιατί

$-1 \le \eta\mu x \le 1 \Leftrightarrow x^2-1 \le x^2+\eta\mu x \le x^2+1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2-1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+1) = +\infty\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{K.П.}} \lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+\eta\mu x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(f(x)\cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)}\right) \overset{f(x)=u}{\underset{\substack{x\to -\infty\\ f(x)\to +\infty\\ u\to 0}}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \frac{1}{u}\eta\mu u = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$