

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

25/7/2025

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό. (7 μονάδες)
- A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία. (3+2 μονάδες)
- A3. Πότε μια συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (3 μονάδες)
- A4. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος
- i) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
 - ii) Αν για τη συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ και $f(a) > 0$ τότε θα είναι υποχρεωτικά $f(\beta) > 0$.
 - iii) Ισχύει ότι $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h}$, με την προϋπόθεση ότι f παραγωγίσιμη στο x_0 .
 - iv) Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό.
 - v) Οι γραφικές παραστάσεις δύο αντίστροφων συναρτήσεων είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.
- (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$.

- B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. (4 μονάδες)
- B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της. (3+5 μονάδες)
- B3. Αν $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, $x > 1$, τότε, να υπολογίσετε
- i) τις φ' , φ'' . (4+3 μονάδες)
 - ii) τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. (6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln x$ και $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{x}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x - \frac{1}{x} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα, με $x_0 \in (1, e)$.

Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

(3+2 μονάδες)

Γ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) + x^2 g(x)$, $x > 0$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Αφού δείξετε

ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται, να λύσετε την ανίσωση $h^{-1}(x) \geq x$.

(5 μονάδες)

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2^{-x} + 3^{-x} + 1)$.

(5 μονάδες)

Γ4. Αν x_0 η ρίζα του ερωτήματος Γ1, να αποδείξετε ότι $x_0^{x_0} = e$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^x - e}{x - x_0} = e \frac{x_0 + 1}{x_0}.$$

(3+7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \eta \mu x, & x < 0 \\ e^x \eta \mu x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο 0

(3 μονάδες)

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης για $x < 0$.

(2 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης για $x \geq 0$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$

για κάθε $x \in [0, \pi]$.

(2+3 μονάδες)

Δ4. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x^2-1} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{x} \quad \text{iii) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h^2 + \eta \mu h}.$$

(3+3+4 μονάδες)

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right]$.

(2+3 μονάδες)