

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ
12/10/25

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε ένα σύνολο A λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου B ;

Μονάδες 5

A2. α) Αν Ω ένα βασικό σύνολο, $\emptyset$ το κενό σύνολο και $A \subseteq \Omega$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $\emptyset' =$

ii) $\Omega' =$

iii) $(A')' =$

β) Έστω $A \subseteq B$. Τότε:

i) $A \cap B =$

ii) $A \cup B =$

Μονάδες 10

A3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις :

α) Δίνεται το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{N}, \text{όπου } x \text{ ψηφίο του αριθμού } 2025\}$.

Το σύνολο A έχει 3 υποσύνολα.

β) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$.

γ) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

δ) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε $\alpha + \beta$ άρρητος.

ε) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει $(\alpha + \beta)^2 = (-\alpha - \beta)^2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha^2 = 2\alpha + \beta \text{ και } \beta^2 = 2\beta + \alpha.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

ii. $\alpha + \beta = 1$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

Μονάδες 15

B2. Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι :

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

β) οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\frac{2x-4}{x^2+4x+4} \div \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

ii) $\left(\frac{\alpha^2 x - \beta^2}{x^2 - 1} + \frac{\beta^2 x - \alpha^2}{1 - x^2} \right) \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{\alpha x + \beta x - \alpha - \beta}$

Μονάδες(5+4)

Γ2. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

i) $(\alpha+1)^2 - (\alpha-1)(\alpha+1) = 2(\alpha+1)$

ii) $(\beta+2)^3 - 6(\beta+1)^2 = \beta^3 + 2$

Μονάδες(5+4)

Γ3. Δίνεται η παράσταση :

$$A = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}, \text{ όπου } \alpha, \beta \neq 0$$

i) Να αποδείξετε ότι : $A = \alpha - \beta$

ii) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης : $B = \frac{99^3 - 19^3}{118^2 - 99 \cdot 19}$, χωρίς να κάνετε

πράξεις.

Μονάδες(4+3)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να αποδείξετε ότι για $\alpha \in \mathbb{Z}$, αν $(\alpha+3)^2$ είναι άρτιος αριθμός , τότε ο αριθμός α είναι περιττός.

Μονάδες 5

Δ2. Αν ισχύει $\alpha + 2\beta = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = (16\alpha + 32\beta)^{-2} - (32\alpha + 64\beta)^{-2} + \left[\left(-\frac{2}{3} \right)^{-4} \div 3^4 \right]^2$$

Μονάδες 8

Δ3. Για τους αριθμούς α και β ισχύουν οι σχέσεις:

$$(-1)^{2024} \cdot (\alpha + \beta)^2 + (-1)^{2025} \cdot (\alpha - \beta)^2 = 4 \text{ και } (\alpha - \beta - 1) \cdot (\alpha + \beta - 1) = -2 \cdot (1 + \alpha - \alpha^2)$$

i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha^2 + \beta^2$.

iii) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = (\alpha + \beta)^2.$$

$$B = \alpha^4 + \beta^4.$$

Μονάδες (4+4+4)

Καλή επιτυχία!