

[A4] α) Σ β) $\wedge$ γ) $\wedge$ δ) Σ ε) $\wedge$

ΘΕΜΑ Β

[B1] $f'(x) = \frac{1}{x-4} + 2$, $f(5) = \ln 1 + 10 - 1 = 9$, $f'(5) = 3$

(ε): $y - f(5) = f'(5)(x - 5) \Leftrightarrow y - 9 = 3(x - 5)$

$\Leftrightarrow y = 3x - 15 + 9 \Leftrightarrow \boxed{y = 3x - 6}$

[B2] ci) $f'(x) = \frac{1}{x-4} + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f \uparrow \text{ στο } (4, +\infty)$

cii) f συνεχής $\mathbb{R}' \uparrow \text{ στο } (4, +\infty) \rightarrow f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$
 $= (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

[B3] $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists \xi \in \mathbb{R} \quad f(\xi) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{μια}$
 τομή. Ρίζα στο $(4, +\infty)$ και είναι μοναδική αφού
 $f \uparrow \text{ στο } (4, +\infty)$

[B4] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-4) + 2x - 1 - 3x + 6) =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x-4) - x + 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln(x-4)}{x} - 1 + \frac{5}{x} \right)$

$\stackrel{*}{=} +\infty (0 - 1 + 0) = -\infty$

$\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-4)}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x-4}}{1} = 0$

ΘΕΜΑ Γ

$$\boxed{\Gamma_1} \text{ ci) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta x + 6\omega x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\omega x - \eta x}{1} = 1$$

$$\hookrightarrow \text{οπ} \quad f'(0) = 1$$

$$(ii) \quad (\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{y = x + 1}$$

$$\boxed{\Gamma_2} \quad \Gamma_{1\alpha} \quad x < 0: f(x) = e^x > 0$$

$$\Gamma_{1\alpha} \quad x \in [0, \pi]: f(x) = \eta x + 6\omega x$$

$$\bullet \quad \eta x + 6\omega x = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x + 1 = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x = -1 \Leftrightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq k\pi - \frac{\pi}{4} \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq k - \frac{1}{4} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq k \leq 1 + \frac{1}{4}$$

$$\hookrightarrow \text{οπ} \quad k = 1 \rightarrow x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

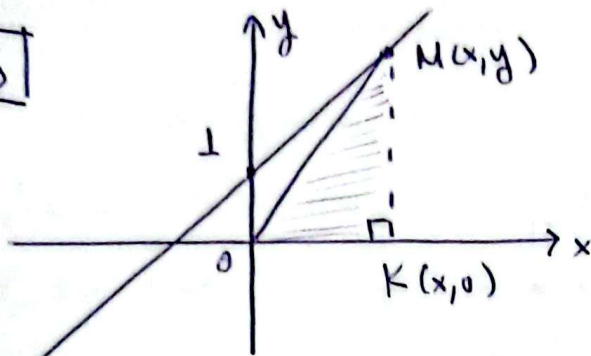
• f συνέχεται στο $[0, \pi]$ οπότε τριγωνομετρικά

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
x_1	0	π	
$f(x_1)$	1	0	-1
$f(x)$	+	0	-

$$\text{ΑΡΑ} \quad f(x) > 0 \quad \text{ΟΤΑΝ} \quad x \in (-\infty, \frac{3\pi}{4})$$

$$f(x) < 0 \quad \text{ΟΤΑΝ} \quad x \in (\frac{3\pi}{4}, \pi]$$

Γ3



(E): $y = x + 1$

$$(OMK) = \frac{1}{2} (OK)(MK) = \frac{1}{2} x \cdot y = \frac{1}{2} x(x+1) = \frac{1}{2} (x^2 + x)$$

• $E(t) = \frac{1}{2} (x^2(t) + x(t))$

• $E'(t) = \frac{1}{2} (2x(t)x'(t) + x'(t))$

Γ1α $t = t_0$: $E'(t_0) = \frac{1}{2} (2x(t_0)x'(t_0) + x'(t_0))$
 $= \frac{1}{2} (4 \cdot 2 + 2) = 5 \text{ Jov} \delta \text{ f s} / \text{ sec}$

Γ4 $\nexists \Sigma \gamma \text{ N} \in \mathbb{N} \leq \Sigma \gamma \in [-1, \pi]$ α no θ.μ.α.τ. $\exists x_1, x_2 \in [-1, \pi]$:

$f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$

οπότε $\begin{cases} m \leq f(\alpha) \leq M \\ m \leq f(\frac{3\pi}{4}) \leq M \\ m \leq f(\theta) \leq M \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & 3m \leq f(\alpha) + f(\frac{3\pi}{4}) + f(\theta) \leq 3M \\ & \Leftrightarrow m \leq \frac{f(\alpha) + f(\theta)}{3} \leq M \end{aligned}$

Αρα ο αριθμός $\frac{f(\alpha) + f(\theta)}{3} \in [m, M] = f([-1, \pi])$

οπότε $\exists$ τουλάχιστον $\xi \in [-1, \pi]$: $f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\theta)}{3}$

(3)

[Δ1] θεωρώ $g(x) = -x^3 - x + 3, x \in \mathbb{R}$

• $g'(x) = -3x^2 - 1 < 0 \propto g \downarrow$ ομοζ. ή $\in \mathbb{R}$

$g(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\mathbb{R}$

• $g(1) = -1 - 1 + 3 = 1 > 0$
 $g(2) = -8 - 2 + 3 = -7 < 0$ $\Rightarrow g(1)g(2) < 0$ Από θ. Bolzano

ή $\in \mathbb{R}$ $g(x) = 0$ έχει τογλ. μια ρίζα στο $(1, 2)$

Τεχνικά $\exists$ μοναδικό $x_0 \in (1, 2): g(x_0) = 0$

[Δ2] $(-x^3 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0 - 3 = 0)$

Από **[Δ1]** έχουμε $-x_0^3 - x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0 - 3 = 0$

Για $\boxed{x < x_0}$: $(x_0^3 + x - 3)^2 \neq 0 \propto$ κ' $f(x) \neq 0$

και επομένως f συνεχής στο $(-\infty, x_0)$

τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο

δηλ. $f(x) = x^3 + x - 3$ ή $f(x) = -x^3 - x + 3, x < x_0$

Για $\boxed{x > x_0}$: $(x^3 + x - 3)^2 \neq 0 \propto$ κ' $f(x) \neq 0$

κ' επομένως f συνεχής στο $(x_0, +\infty)$

τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο

δηλ. $f(x) = x^3 + x - 3$ ή $f(x) = -x^3 - x + 3, x > x_0$

► οπότε:

$$f(x) = x^3 + x - 3, x \in \mathbb{R} \text{ ή } f(x) = \begin{cases} x^3 + x - 3, & x \leq x_0 \\ -x^3 - x + 3, & x > x_0 \end{cases}$$

$$\text{ή } f(x) = \begin{cases} -x^3 - x + 3, & x \leq x_0 \\ x^3 + x - 3, & x > x_0 \end{cases}$$

$$\text{ή } f(x) = x^3 - x + 3, x \in \mathbb{R}$$

Εξίσω ότι η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3+x-3, & x \leq x_0 \\ -x^3-x+3, & x > x_0 \end{cases}$

Είναι παραμυή στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$\triangleright \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{x^3+x-3}{x-x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} 3x^2+1 = 3x_0^2+1$

$\triangleright \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} -3x^2-1 = -3x_0^2-1$

$3x_0^2+1 = -3x_0^2-1 \Leftrightarrow 6x_0^2 = -2$ Ατονο

Ουοίος Διχνοομτ ότι η $f(x) = \begin{cases} -x^3-x+3, & x \leq x_0 \\ x^3+x-3, & x > x_0 \end{cases}$

Δεν είναι παραμυή στο x_0

Τμικα $f(x) = x^3+x-3, x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -x^3-x+3, x \in \mathbb{R}$

Δ3 (ε): $y = f'(x_1)x - f'(x_1)x + f(x_1)$

Είςέση: $f(x) = y \Leftrightarrow -x^3-x+3 = (-3x_1^2-1)x + (3x_1^2+1)x_1 - x_1^3 - x_1 + 3$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x_1^2 \cdot x + 2x_1^3 = 0$

1	0	$-3x_1^2$	$+2x_1^3$	$\underline{1x_1}$
$\downarrow$	x_1	x_1^2	$-2x_1^3$	
1	x_1	$-2x_1^2$	$\underline{0}$	

$(x-x_1)(x^2+x_1x-2x_1^2) = 0$

$\downarrow$
 $x = x_1$

$\Delta = x_1^2 + 8x_1^2 = 9x_1^2$

$x = \begin{cases} \frac{-x_1+3x_1}{2} = x_1 \\ \frac{-x_1-3x_1}{2} = \frac{-4x_1}{2} = -2x_1 \neq x_1 \end{cases}$

Αρα, η (ε) της (f

→ τμντ τθν (f και
στο σημείο $N(-2x_1, f(-2x_1))$

(5)

Δ4 θεωρούμε $h(x) = f(x) (x^{\frac{2026}{2025}} + k \cdot x^{\frac{2025}{2026}} + \lambda x + 1) - e^{2x}$, $x \in [0, 2]$

$$\begin{cases} h(0) = f(0) (0 + 0 + 0 + 1) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0 \\ h(x_0) = f(x_0) (x_0^{\frac{2026}{2025}} + k \cdot x_0^{\frac{2025}{2026}} + \lambda x_0 + 1) - e^{2x_0} = -e^{2x_0} < 0 \end{cases}$$

$h(0)h(x_0) < 0$ άρα θ.Βολζανο η f έστω $h(x) = 0$

Έχει μια τουλάχιστον π_0 στο $(0, x_0) \subseteq (0, 2)$