ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ (20-9-2025)

ΘΕΜΑ Α

Α2: Α-ΙΙ   Β-Ι   Γ-ΙΙΙ

Α3: 1) ΛΑΘΟΣ   4) ΛΑΘΟΣ
2) ΛΑΘΟΣ   5) ΣΩΣΤΟ
3) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1: $h(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$, $g(x)=x-1$.

$h(x)$: πρέπει $x+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -1$
$A_h=\mathbb{R}-\{-1\}$

$g(x)$: $A_g=\mathbb{R}$

αφού $A_h\neq A_g$ οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες.

Β2: $f(-1)=f(1)=0 \Rightarrow$ η f δεν είναι "1-1"

$g(x)=x-1$ ↗ ευθεία $\Rightarrow g$: "1-1" $\Rightarrow \exists\, g^{-1}$

Έστω $g(x)=y \Leftrightarrow x-1=y \Leftrightarrow x=y+1$, $y\in\mathbb{R}$.

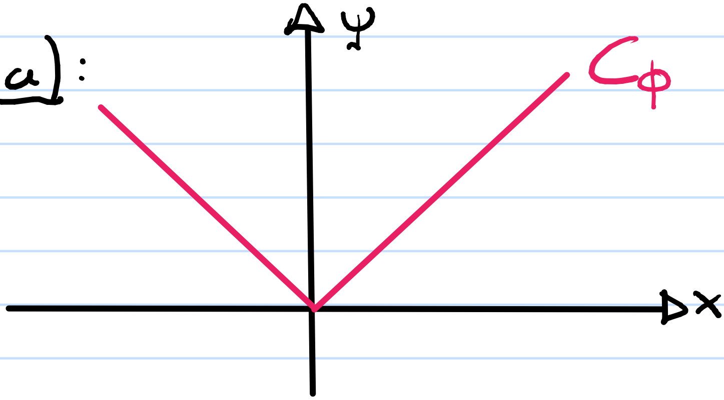
Συνεπώς $g^{-1}(x)=x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Β3: $A_{g^{-1}\circ f}=\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_{g^{-1}}\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$.

$(g^{-1}\circ f)(x)=g^{-1}(f(x))=f(x)+1=x^2$

$\varphi(x)=\sqrt{(g^{-1}\circ f)(x)}=\sqrt{x^2}=|x|$

Β3 (συνέχεια):



Β4: i) $f(x)+2 \le h(x) \le g(x)+2 \;,\; x \in [0,1]$

• $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+2) = \lim\limits_{x\to 1}(x^2+1) = 2$

• $\lim\limits_{x\to 1}(g(x)+2) = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2$.

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4} =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{h(x)+7})^2-9}{(h^2(x)-4)(\sqrt{h(x)+7}+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{h(x)-2}}{\cancel{(h(x)-2)}(h(x)+2)(\sqrt{h(x)+7}+3)}$$

$$= \frac{1}{4\cdot 6} = \frac{1}{24}.$$

ΘΕΜΑ Γ:

Γ1:

Για $x<0$: $f(x)=\frac{1}{1-x}$ συνεχής ως ρητή

Για $0<x<3\pi/2$: $f(x)=\etaμx+συνx$ συνεχής ως άθροισμα συνεχών.

Για $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\etaμx+συνx)=1$ $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0) \Rightarrow f$ συνεχής.

Γ2:

- Για $x<0$: $f(x)=\frac{1}{1-x}$, $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$
- Για $x>0$: $f(x)=\etaμx+συνx$, $f'(x)=συνx-\etaμx$
- Για $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1-x)}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\etaμx+συνx-1}{x}=$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\etaμx}{x}+\frac{συνx-1}{x}\right)=1+0=1$

άρα $f'(0)=1$.

Έτσι $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1-x)^2}, & x<0\\ συνx-\etaμx, & 0\le x<3\pi/2\end{cases}$

Γ3:

$g(x)=\ln(x+2)+x$ με $x>-2$

$g'(x)=\frac{1}{x+2}+1>0 \Rightarrow g \uparrow \Rightarrow g$ "1-1"

$g^{-1}(g(x+5)-2-\ln 3)=-1 \iff g(g^{-1}(g(x+5)-2-\ln 3))=g(-1)$

$\iff g(x+5)-2-\ln 3=-1 \iff g(x+5)=\ln 3+1$

$\iff g(x+5)=g(1) \xrightarrow{g\ \text{"1-1"}} x+5=1 \iff \boxed{x=-4}$

Γ4: $\ln\frac{\eta\mu x+2}{x+2}=x-\eta\mu x$, $x>-2$

$\iff \ln(\eta\mu x+2)-\ln(x+2)=x-\eta\mu x$

$\iff \ln(\eta\mu x+2)+\eta\mu x=\ln(x+2)+x$

$\iff g(\eta\mu x)=g(x)$

$\xLeftrightarrow{g\ \text{"1-1"}} \eta\mu x=x$. Η εξίσωση παρουσιάζει μοναδική ρίζα $x=0$.

αφού ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ για $x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1: $g(x) = x\ln x - x$, $x>1$

$g'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x$, $x>1$

Για $x>1 \Rightarrow g'(x)>0 \Rightarrow g \nearrow$

Δ2: Αρκεί για $x>1$: $\frac{x-1}{x} < \ln x$

$\Leftrightarrow x-1 < x\ln x \Leftrightarrow x\ln x - x > -1$

$\Leftrightarrow g(x) > -1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} x>1$

$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} < 0$

Δ3. $\frac{f(a)}{x-1} + \frac{f^{-1}(b)}{x-2} = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\cdot f(a) + (x-1)\cdot f^{-1}(b) = 0$ (*)

Θεωρώ $k(x) = (x-2)f(a) + (x-1)f^{-1}(b)$, $x\in[1,2]$.

$k(1) = -f(a) < 0$ (διότι $f(A) = (0,1) \Rightarrow f(x)>0$)
$k(2) = f^{-1}(b) > 0$ (διότι $f^{-1}(A) = A_f = (1,+\infty) \Rightarrow f^{-1}(x)>0$)

έτσι $k(1)\cdot k(2) < 0$ από Θ Bolzano $\exists\, x_0\in(1,2): k(x_0)=0$

Η $k(x)$ είναι 1ου βαθμού οπότε η ρίζα μοναδική.

Β τρόπος:

(*) $\Rightarrow (f(a)+f^{-1}(b))\,x = 2f(a) + f^{-1}(b)$

$\xrightarrow[f^{-1}(b)>0]{f(a)>0} \quad x = \frac{2f(a)+f^{-1}(b)}{f(a)+f^{-1}(b)}$ (μοναδική λύση)

Δ4) $f'(x)<0$ (από Δ2) άρα η $f \downarrow$

αν $x_1, x_2 \in A_{f^{-1}} = f(A)$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2)) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2)$

οπότε και η $f^{-1} \downarrow$

Για την εξίσωση $\boxed{f^{-1}(2x^2) - f^{-1}(x) = 2x-1}$ (**)

πρέπει $2x^2, x \in A_{f^{-1}} = f(A) = (0,1)$

οπότε $\begin{cases} \boxed{0<x<1} \\ \text{και} \\ 0<2x^2<1 \Leftrightarrow 0<x^2<1/2 \end{cases}$ και $\boxed{x \neq 0}$, $x^2 < 1/2$

• $x^2 < 1/2 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{2}/2 \Leftrightarrow \boxed{-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2}$

Άρα $x \in (0, \sqrt{2}/2)$.

Έστω $2x^2 - x > 0$

x		0		$1/2$		$\sqrt{2}/2$
$2x^2-x$	$+$	0	$-$	0	$+$	

• Άρα για $x \in (1/2, \sqrt{2}/2)$:

$2x^2 > x \overset{f^{-1}\downarrow}{\Leftrightarrow} f^{-1}(2x^2) < f^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$f^{-1}(2x^2) - f^{-1}(x) < 0 \overset{(**)}{\Leftrightarrow} 2x-1 < 0$

$\Leftrightarrow x < 1/2$ Άτοπο αφού $x \in (1/2, \sqrt{2}/2)$

Για $x \in (0, 1/2)$:

$$2x^2 < x \overset{f^{-1} \downarrow}{\iff} f^{-1}(2x^2) > f^{-1}(x) \iff$$

$$f^{-1}(2x^2) - f^{-1}(x) > 0 \overset{**}{\iff} 2x-1 > 0 \iff x > 1/2$$

Άτοπο αφού $x \in (0, 1/2)$

Συνεπώς $\boxed{x = 1/2}$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης αφού:

$$** \xrightarrow{x=1/2} f^{-1}\left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) - f^{-1}(1/2) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1$$

$$\cancel{f^{-1}(1/2)} - \cancel{f^{-1}(1/2)} = \cancel{1-1}$$

$$0 = 0.$$