1.✉Ζωγράφου:Ι.Χρυσίππου1,☎210 7488030 &ΙΙ.Ξηρογιάννη 10 ,☎210 7488180
2.✉Χολαργός:Φανερωμένης13,☎210 6536551
3.✉ΑγίαΠαρασκευή:Ευεργέτου Γιαβάση9,πλατείαΑγ.Παρασκευής,☎2106000031

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

25/10/2025

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln\alpha$.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της εξίσωσης εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο σημείο της $A\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)**.

α) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

β) Αν f(5) = 3 και η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση,τότε $f'(5) = 0$.

γ) Κάθε συνάρτηση έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την εφαπτομένη της.

δ) Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

ε) Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-4) + 2x - 1$, $x > 4$.

Β1. Να βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο Μ με τετμημένη $x_0 = 5$.

Β2. (i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(4, +\infty)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

Β3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα στο $(4,+\infty)$

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 3x + 6)$.

Μονάδες : 6 – 7 – 6 – 6

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x \quad , & x < 0 \\ ημx + συνx \ , & 0 \le x \le π \end{cases}$

Γ1. (i) Να δείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

Γ2. Να βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα $(-\infty,π]$.

Γ3. Έστω $y = x + 1$ η εξίσωση της ευθείας του ερωτήματος **Γ1** .Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x > 0$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε) . Τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Α(2,3) , ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο .
Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΜΟΚ την χρονική στιγμή t_0 , όπου Κ(x,0) και Ο(0,0) .

Γ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $α \in [-1,\frac{3π}{4})$ και $β \in (\frac{3π}{4},π]$ υπάρχει $ξ\in[-1,π]$ τέτοιο ώστε $f(ξ) = \frac{f(α)+f(β)}{3}$.

Μονάδες : 7 – 7 – 6 – 5

Θέμα Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $-x^3 - x + 3 = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία ανήκει στο (1,2).

Δ2. Να βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση : $f^2(x) = (x^3 + x - 3)^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας .

Αν $f(x) = -x^3 - x + 3$, $x \in R$ τότε :

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της Cf σε οποιοδήποτε σημείο $M(x_1,f(x_1))$, $x_1 \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο εκτός του Μ.

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) \cdot (x^{2026} + κ \cdot x^{2025} + λ \cdot x + 1) = e^{2x} \quad ,κ\,,λ \in R$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).

Μονάδες : 5 – 8 – 6 – 6