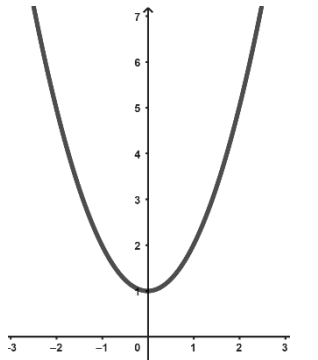
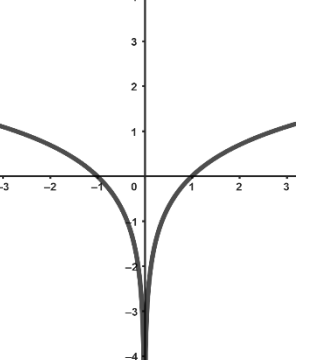
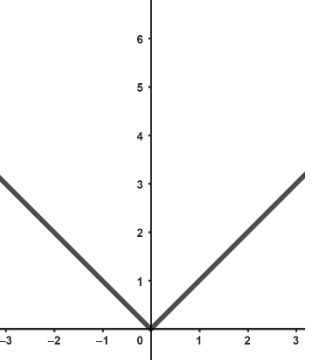
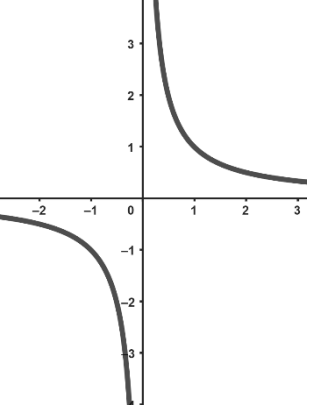
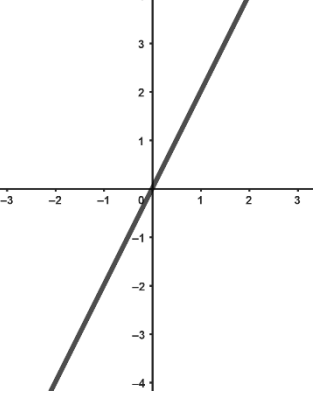
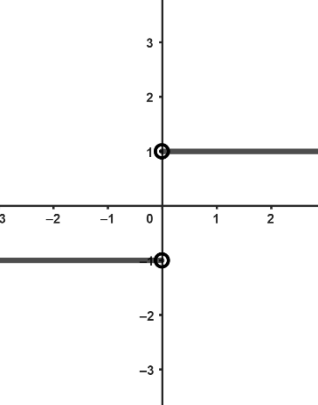


ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Γ' ΤΑΞΗΣ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- A2.** Να γράψετε πότε μια συνάρτηση f καλείται παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της.
- A3.** Να κάνετε αντιστοίχιση κάθε μία από τις συναρτήσεις της πρώτης γραμμής με συνάρτηση της δεύτερης γραμμής που θα μπορούσε να παριστάνει την αντίστοιχη παράγωγο.

Συνάρτηση f	A 	B 	Γ 
Συνάρτηση f'	I 	II 	III 

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν και οι δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$.
3. $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$ για $x < 0$.
4. Αν $f(1) \cdot f(3) > 0$ όπου f συνεχής συνάρτηση τότε δεν παρουσιάζει ρίζα στο $(1,3)$
5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

(7+5+3+10μ)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 1$ και $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ τότε :

- B1.** Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις g, h είναι ίσες.
- B2.** Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη τους αν υπάρχουν.
- B3.** Αν είναι γνωστό ότι $g^{-1}(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$ να προσδιορίσετε την συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά την $\Phi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.
- B4.** Δίνεται η συνάρτηση $K : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) + 2 \leq K(x) \leq g(x) + 2$ για κάθε $x \in [0,1]$.
 - i.** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} K(x) = 2$
 - ii.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{K(x)+7}-3}{K^2(x)-4}$.

(6+6+6+2+5μ)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \ln(x+2) + x, \quad x > -2.$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
- Γ2.** Να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$.
- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι 1-1 και να λύσετε την εξίσωση $g^{-1}(g(x+5) - 2 - \ln 3) = -1$ για $x > -7$.
- Γ4.** Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{\eta\mu x + 2}{x+2} = x - \eta\mu x$ για $x > -2$.

(3+10+6+6μ)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}, \quad x > 1 \quad \text{με} \quad f((1, +\infty)) = (0, 1) \quad \text{και} \quad g(x) = x \ln x - x, \quad x > 1.$$

Δ1. Να βρεθεί η $g'(x)$ και η μονοτονία της g για $x > 1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\frac{x-1}{x} < \ln x$ για κάθε $x > 1$ και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(a)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\beta)}{x-2} = 0$, με $0 < \beta < 1 < a$, παρουσιάζει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση : $f^{-1}(2x^2) - f^{-1}(x) = 2x - 1$.

(5+7+6+7μ)