

1. ☉ Ζωγράφου: Ι. Χρυσίππου 1, ☉ 210 7488030 & ΙΙ. Ξηρογιάννη 10, ☉ 210 7488180
2. ☉ Χολαργός: Φανερωμένης 13, ☉ 210 6536551
3. ☉ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση 9, πλατεία Αγ. Παρασκευής, ☉ 210 6000031

## Διαγώνισμα Άλγεβρα Α' Λυκείου

Ημερομηνία : 7 - 12 - 2025

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|. \quad \text{Μονάδες 10}$$

**A2.** Να διατυπώσετε τον ορισμό της  $n$ -οστής ρίζας. Μονάδες 5

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν  $\alpha > \beta$  και  $\gamma > \delta$ , τότε  $\alpha + \gamma > \beta + \delta$

β) Για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  ισχύει:  $|\alpha - \beta| = -|\beta - \alpha|$

γ) Αν  $\theta > 0$ , τότε:  $|x| > \theta \Leftrightarrow x > \theta$  ή  $x > -\theta$

δ) Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$  ισχύει:  $\sqrt[4]{\alpha^4} = |\alpha|$

ε) Για κάθε  $\alpha \geq 0$  και για κάθε  $\beta \geq 0$  ισχύει:  $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$  Μονάδες 10

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Αν ο πραγματικός αριθμός  $x$  ικανοποιεί τη σχέση:  $|x + 1| < 2$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $x \in (-3, 1)$ ,

β) η τιμή της παράστασης  $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$  είναι αριθμός ανεξάρτητος του  $x$ ,

γ)  $\frac{|x+3|}{x+3} - \frac{|1-x|}{x-1} = 2$ . Μονάδες 5+5+3

**B2.** Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α)  $|2x - 7| = 1$

β)  $|x + 5| = |3 - 2x|$

γ)  $\frac{2|x+1|}{3} - \frac{|x-1|}{2} = \frac{1}{2}$

δ)  $3 - |3 - x| = 9 - |3x - 9|$  Μονάδες 3x4

1. ☉ Ζωγράφου: Ι. Χρυσίππου 1, ☉ 210 7488030 & ΙΙ. Ξηρογιάννη 10, ☉ 210 7488180
2. ☉ Χολαργός: Φανερωμένης 13, ☉ 210 6536551
3. ☉ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση 9, πλατεία Αγ. Παρασκευής, ☉ 210 6000031

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha = \sqrt{7} - \sqrt{3}$  και  $\beta = \sqrt{7} + \sqrt{3}$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\alpha^2 + \beta^2 = 20$

β)  $2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta} = 2$

γ)  $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = 5$

**Μονάδες 4+4+4**

**Γ2.** Δίνονται οι παραστάσεις  $A = |x - 1|$  και  $B = |x + 1|$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $A > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ ,

β)  $A^2 + B^2 = 2x^2 + 2$ ,

γ)  $A^2 + B^2 \geq 4|x|$ . Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν  $x = 1$  ή  $x = -1$ .

**Μονάδες 4+5+4**

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Δίνονται οι παραστάσεις  $A = \frac{x^2 + 4|x| + 4}{|x| + 2}$  και  $B = \sqrt{\sqrt{(2y - 5)^4}}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A = |x| + 2$  και  $B = |2y - 5|$ .

**Μονάδες 5**

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $B = y - 3$

**Μονάδες 4**

γ) Αν  $A \leq 3$  και  $B \leq 1$ , να αποδείξετε ότι:

i.  $-1 \leq x \leq 1$  και  $2 \leq y \leq 3$

ii.  $d(2x, 2y - 5) \leq 3$

**Μονάδες 6+5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι οι λύσεις της εξίσωσης  $\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha + 8\beta + 25 = 0$  είναι οι αριθμοί

$$\alpha = \frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{40} - 1}{(\sqrt[3]{3\sqrt{3}})^2} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{\sqrt{50} + \sqrt{18}}{\sqrt{98} - \sqrt{162}}.$$

**Μονάδες 5**

**Σας ευχόμαστε επιτυχία!!!**