ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ΛΥΚΕΙΟΥ

7/12/2025

ΘΕΜΑ Α

Α1 Σχολικό βιβλίο σελ. 63

Α2 Σχολικό βιβλίο σελ. 70

Α3 α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

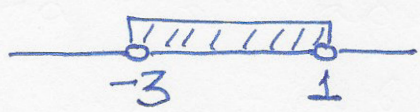
ΘΕΜΑ Β

Β1 α) Είναι: $|x+1|<2 \Leftrightarrow -2<x+1<2$

$\Leftrightarrow -2-1<x+1-1<2-1$

$\Leftrightarrow -3<x<1$.

$\Leftrightarrow x\in(-3,1)$.



β) Είναι: $x>-3 \Rightarrow x+3>0 \Rightarrow |x+3|=x+3$

$x<1 \Rightarrow x-1<0 \Rightarrow |x-1|=-x+1$

Άρα

$$K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}=\frac{x+3-x+1}{4}=\frac{4}{4}=1$$

Επομένως, η παράσταση K δεν εξαρτάται από το x.

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε:

$$\frac{|x+3|}{x+3} - \frac{|1-x|}{x-1} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{1-x}{x-1}$$

$$= \frac{x+3}{x+3} + \frac{x-1}{x-1}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2.$$

B2 α) $|2x-7| = 1 \Leftrightarrow 2x-7=1$ ή $2x-7=-1$

$\Leftrightarrow 2x=8$ ή $2x=6$

$\Leftrightarrow x=4$ ή $x=3$

β) $|x+5| = |3-2x| \Leftrightarrow x+5=3-2x$ ή $x+5=-3+2x$

$\Leftrightarrow x+2x=3-5$ ή $x-2x=-5-3$

$\Leftrightarrow 3x=-2$ ή $-x=-8$

$\Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$ ή $x=8$.

γ) $\frac{2|x|+1}{3} - \frac{|x|-1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6\cdot\frac{2|x|+1}{3} - 6\,\frac{|x|-1}{2} = 6\cdot\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(2|x|+1) - 3(|x|-1) = 3$

$\Leftrightarrow 4|x|+2-3|x|+\cancel{3} = \cancel{3}$

$\Leftrightarrow |x| = -2$ Αδύνατη

δ) $3-|3-x| = 9-|3x-9| \Leftrightarrow 3-|x-3| = 9-|3(x-3)|$

$\Leftrightarrow 3-|x-3| = 9-3|x-3|$

$\Leftrightarrow 3|x-3|-|x-3| = 9-3$

$\Leftrightarrow 2|x-3| = 6$

$\Leftrightarrow |x-3| = 3$

$\Leftrightarrow x-3=3$ ή $x-3=-3$

$\Leftrightarrow x=6$ ή $x=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 α) $a^2+b^2=(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2$

$=(\sqrt{7})^2-2\sqrt{7}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2$

$=7-\cancel{2\sqrt{7}\sqrt{3}}+3+7+\cancel{2\sqrt{7}\sqrt{3}}+3$

$=20$

β) $2^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\sqrt[3]{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt[3]{2(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$

$=\sqrt[3]{2((\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2)}$

$=\sqrt[3]{2(7-3)}$

$=\sqrt[3]{8}$

$=2$

γ) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}+\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}$

$\overset{\text{α.ερωτ.}}{=}\frac{20}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=\frac{20}{7-3}$

$=5$

Γ2 α) $A > 2 \iff |x-1| > 2$

$\iff x-1>2$ ή $x-1<-2$

$\iff x>3$ ή $x<-1$

$\iff x \in (-\infty,-1) \cup (3,+\infty)$

β) $A^2+B^2 = |x-1|^2 + |x+1|^2$

$= (x-1)^2 + (x+1)^2$

$= x^2 - \cancel{2x} + 1 + x^2 + \cancel{2x} + 1$

$= 2x^2+2$

γ) $A^2+B^2 \geq 4|x| \overset{\text{β.ερωτ.}}{\iff} 2x^2+2 \geq 4|x|$

$\overset{:2}{\iff} x^2+1 \geq 2|x|$

$\iff x^2 - 2|x| + 1 \geq 0$

$\iff |x|^2 - 2|x| + 1 \geq 0$

$\iff (|x|-1)^2 \geq 0$, ισχύει.

ΙΣΟΤΗΤΑ: $A^2+B^2 = 4|x| \iff (|x|-1)^2 = 0$

$\iff |x|-1=0$

$\iff |x|=1$

$\iff x=1$ ή $x=-1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 α) $A = \dfrac{x^2+4|x|+4}{|x|+2} = \dfrac{|x|^2+4|x|+4}{|x|+2}$

$= \dfrac{(|x|+2)^{\cancel{2}}}{\cancel{|x|+2}}$

$= |x|+2$

$$B = \sqrt{\sqrt{(2y-5)^4}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{(2y-5)^4}}$$
$$= \sqrt[4]{(2y-5)^4}$$
$$= |2y-5|$$

β) $B = y-3 \iff |2y-5| = y-3$

Πρέπει: $y-3 \geq 0 \iff \boxed{y \geq 3}$ (1)

$|2y-5| = y-3 \iff 2y-5 = y-3$ ή $2y-5 = -y+3$

$\iff 2y-y = 5-3$ ή $2y+y = 5+3$

$\iff y = 2$ ή $3y = 8$

Απορρίπτεται από (1)

$\iff y = \frac{8}{3}$ Απορρίπτεται από (1)

Η εξίσωση είναι αδύνατη.

γ) i) $A \leq 3 \iff |x|+2 \leq 3$

$\iff |x| \leq 1$

$\iff -1 \leq x \leq 1$

$B \leq 1 \iff |2y-5| \leq 1$

$\iff -1 \leq 2y-5 \leq 1$

$\iff 5-1 \leq 2y \leq 1+5$

$\iff 4 \leq 2y \leq 6$

$\iff 2 \leq y \leq 3$

ii) $d(2x, 2y-5) \leq 3 \Leftrightarrow |2x-(2y-5)| \leq 3$

$$\Leftrightarrow |2x-2y+5| \leq 3$$
$$\Leftrightarrow -3 \leq 2x-2y+5 \leq 3$$
$$\Leftrightarrow -3-5 \leq 2x-2y \leq 3-5$$
$$\Leftrightarrow -8 \leq 2x-2y \leq -2$$
$$\Leftrightarrow -4 \leq x-y \leq -1 \quad (2)$$

Οπότε, αρκεί να αποδείξουμε τη σχέση (2).

Από γ) i) έχουμε:

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow -2 \geq -y \geq -3$$
$$\Leftrightarrow \boxed{-3 \leq -y \leq -2} \quad (3)$$

και

$$\boxed{-1 \leq x \leq 1} \quad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3) και (4)

Παίρνουμε:

$$-1-3 \leq x-y \leq 1-2$$
$$\Leftrightarrow -4 \leq x-y \leq -1$$

Και έτσι, η (2) έχει αποδειχθεί.

Δ2 Λύνουμε πρώτα την εξίσωση. Είναι:

$$a^2+b^2-6a+8b+25=0$$
$$\Leftrightarrow (a^2-6a+9)+(b^2+8b+16)=0$$
$$\Leftrightarrow (a-3)^2+(b+4)^2=0$$

$\Leftrightarrow \ a-3=0 \quad \text{και} \quad b+4=0$

$\Leftrightarrow \ a=3 \quad \text{και} \quad b=-4$

Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$\frac{\sqrt{10}\,\sqrt[3]{5}\,\sqrt[6]{40}-1}{\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^2}=3$$

και

$$\frac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{\sqrt{98}-\sqrt{162}}=-4.$$

Είναι

$$\frac{\sqrt{10}\,\sqrt[3]{5}\,\sqrt[6]{40}-1}{\left(\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{\sqrt[6]{10^3}\,\sqrt[6]{5^2}\,\sqrt[6]{40}-1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3^2\cdot 3}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{10^3\cdot 5^2\cdot 40}-1}{\left(\sqrt[3]{\sqrt{3^3}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{10^3\cdot 25\cdot 40}-1}{\left(\sqrt[6]{3^3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{10^3\cdot 10^3}-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt[6]{10^6}-1}{3}$$

$$=\frac{10-1}{3}$$

$$=3$$

$$\frac{\sqrt{50}+\sqrt{18}}{\sqrt{98}-\sqrt{162}} = \frac{\sqrt{2\cdot 25}+\sqrt{2\cdot 9}}{\sqrt{2\cdot 49}-\sqrt{2\cdot 81}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{25}+\sqrt{2}\sqrt{9}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{49}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{81}}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-9\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8\cancel{\sqrt{2}}}{-2\cancel{\sqrt{2}}}$$

$$= -\frac{8}{2}$$

$$= -4.$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.