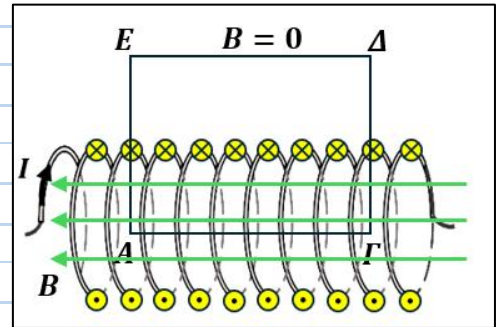


ΘΕΜΑ Α

A1-α A2-δ A3-β A4-α A5-εελλλ

ΘΕΜΑ Β

B1.1. Σωληνοειδές άπειρου μήκους έχει n σπείρες ανά μονάδα μήκους και διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης I . Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η τομή του σωληνοειδούς με επίπεδο που περιέχει τον άξονά του. Γνωρίζουμε (πειραματικά) ότι στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς μεγάλου μήκους το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές και παράλληλο με τον άξονά του. Έξω από το σωληνοειδές το πεδίο είναι ασθενές, συγκρινόμενο με το πεδίο στο εσωτερικό. Στην ιδανική περίπτωση που το μήκος του σωληνοειδούς είναι άπειρο, το μαγνητικό πεδίο έξω από αυτό μπορεί να θεωρηθεί μηδέν. Για να υπολογίσουμε το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο εσωτερικό του σωληνοειδούς θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο Ampere. Επιλέγουμε μια κλειστή ορθογώνια διαδρομή ΑΓΔΕΑ όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα η οποία περιλαμβάνει N σπείρες του σωληνοειδούς. Η πλευρά ΑΓ έχει μήκος ℓ . Εφαρμόζοντας τον νόμο Ampere κατά μήκος της κλειστής διαδρομής ΑΓΔΕΑ έχουμε:



$$\sum B \, d\ell \, \cos\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$$

Για το πρώτο μέλος της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum B \, d\ell \, \cos\theta = \sum_{(ΑΓ)} B \, d\ell \, \cos\theta + \sum_{(ΓΔ)} B \, d\ell \, \cos\theta + \sum_{(ΔΕ)} B \, d\ell \, \cos\theta + \sum_{(ΕΑ)} B \, d\ell \, \cos\theta \quad (1)$$

Στη διαδρομή ΑΓ το άθροισμα των γινομένων κατά μήκος αυτής είναι $B\ell$. Η ένταση \vec{B} στη διαδρομή ΑΓ είναι σταθερή, η γωνία θ είναι μηδενική ($\vec{B} \uparrow d\vec{\ell}$) άρα $\cos\theta = \cos 0 = 1$ και $\sum d\ell = \ell$, οπότε:

$$\sum_{(ΑΓ)} B \, d\ell \, \cos\theta = B \sum_{(ΑΓ)} d\ell = B\ell$$

Στις διαδρομές ΓΔ και ΕΑ τα αθροίσματα είναι μηδενικά γιατί, όπου υπάρχει, η ένταση \vec{B} του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετη στη διαδρομή ($\vec{B} \perp d\vec{\ell}$). Επομένως $\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$, οπότε:

$$\sum_{(ΓΔ)} B \, d\ell \, \cos\theta = 0 \quad , \quad \sum_{(ΕΑ)} B \, d\ell \, \cos\theta = 0$$

Στη διαδρομή ΔΕ το άθροισμα είναι μηδενικό γιατί το τμήμα ΔΕ είναι εκτός του σωληνοειδούς και στην περιοχή αυτή δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο $B = 0$, οπότε:

$$\sum_{(ΔΕ)} B \, d\ell \, \cos\theta = 0$$

Τελικά από την (1) προκύπτει:

$$\sum B \, d\ell \, \cos\theta = \sum_{(ΑΓ)} B \, d\ell \, \cos\theta = B\ell$$

και από τον νόμο Ampere ισχύει:

$$\sum B \, d\ell \, \cos\theta = \mu_0 I_{\text{εγκ}} \quad \text{οπότε} \quad B\ell = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$$

Σύμφωνα με το νόμο του Ampere το άθροισμα αυτό είναι ίσο με το γινόμενο της σταθεράς μ_0 επί το **συνολικό ρεύμα** που διαπερνά την κλειστή ορθογώνια διαδρομή. Αν I το ρεύμα που διαρρέει κάθε σπείρα και N ο αριθμός των σπειρών που περιέχονται στην ορθογώνια διαδρομή, τότε το ολικό ρεύμα που διέρχεται είναι $I_{\text{εγκ}} = NI$. Οπότε $B\ell = \mu_0 I_{\text{εγκ}}$ ή $B\ell = \mu_0 NI$ ή

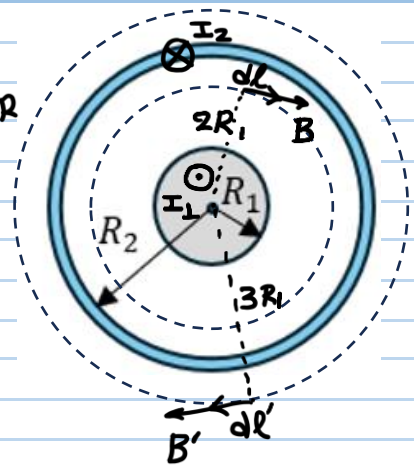
$$B = \mu_0 I \frac{N}{\ell} = \mu_0 I n$$

B1. II-α Εφαρμόζοντας τον νόμο Ampere

σε μια κλειστή κυλινδρική διαδρομή ακτίνας $2R$

έχουμε: $\int B dl \cos \theta = \mu_0 I_{\text{enc}} \Rightarrow B \int dl = \mu_0 I_1$

$$\Rightarrow B \cdot 2\pi \cdot 2R_1 = \mu_0 I_1 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi R_1}$$



Ομοίως σε μια κλειστή κυλινδρική διαδρομή

ακτίνας $3R$ έχουμε: $\int B' dl' \cos \theta = \mu_0 I'_{\text{enc}}$

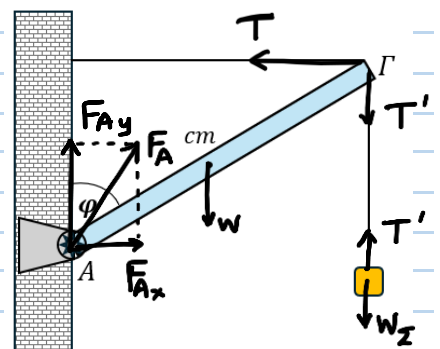
$$\Rightarrow B' \int dl' = \mu_0 (I_2 - I_1) \Rightarrow B' \cdot 2\pi \cdot 3R_1 = \mu_0 (3I_1 - I_1) \Rightarrow B' = \frac{\mu_0 I_1}{3\pi R_1}$$

$$\text{Άρα } \frac{B'}{B} = \frac{\frac{\mu_0 I_1}{3\pi R_1}}{\frac{\mu_0 I_1}{4\pi R_1}} \Rightarrow \frac{B'}{B} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{B' = \frac{4}{3} B} \text{ (α)}$$

B2-β $\varphi = 53^\circ$ $\sin \varphi = 0,6$ $\eta \mu \varphi = 0,8$

Στο σώμα Σ ασκούνται το βάρος \vec{W}_Σ και η τάση νήματος \vec{T}' .

Ισορροπία σώματος: $\sum F_{\Sigma(y)} = 0 \Rightarrow T' = W_\Sigma = W$



Στη δοκό ασκούνται η τάση T του οριζώντιου

νήματος, το βάρος της \vec{W} , η δύναμη άρθρωσης \vec{F}_A και η τάση T' από το κατακόρυφο νήμα.

Ισορροπία δοκού: $\sum \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_T - \tau_{T'} - \tau_W = 0$

$$\Rightarrow T l \sin \varphi = T' l \eta \mu \varphi + W \frac{l}{2} \eta \mu \varphi$$

$$\Rightarrow T \cdot 0,6 = 0,8 W + 0,4 W \Rightarrow T = 2W$$

Επίσης: $\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{Ax} = T$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{Ay} = T' + W = 2W = T$$

$$\text{Όπως } \vec{F}_A = \vec{F}_{Ax} + \vec{F}_{Ay} \rightarrow \text{μέτρο } F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = \sqrt{T^2 + T^2} \Rightarrow \boxed{F_A = \sqrt{2} T} \text{ (β)}$$

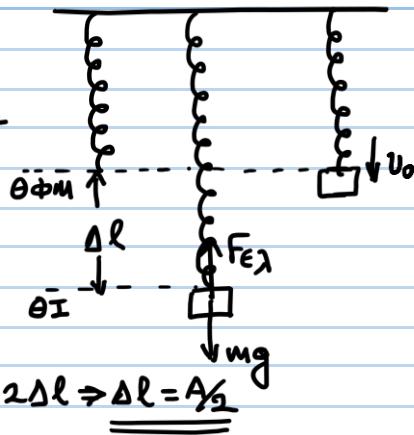
B3-α Στις θλιψές αατ ισχύει:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{ελ} = mg \Rightarrow k \Delta l = mg \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k}$$

ΑΔΕΤ στη ΘΦΜ: $E = K + U$ ($v = k$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k \Delta l^2, \quad v_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \Delta l$$

$$\Rightarrow k A^2 = m \frac{3k}{m} \Delta l^2 + k \Delta l^2 \Rightarrow A^2 = 4 \Delta l^2 \Rightarrow A = 2 \Delta l \Rightarrow \underline{\underline{\Delta l = \frac{A}{2}}}$$



Μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικού έχουμε στην κάτω ακραία

θέση όπου $\Delta l_{\max} = \Delta l + A = 3 \Delta l$.

$$U_{ελ\max} = \frac{1}{2} k \Delta l_{\max}^2 = \frac{1}{2} k \cdot 9 \Delta l^2 = \frac{1}{2} k \cdot 9 \left(\frac{A}{2}\right)^2 \Rightarrow U_{ελ\max} = \frac{9}{4} \frac{1}{2} k A^2$$

όπου $E = \frac{1}{2} k A^2$ άρα $U_{ελ\max} = \frac{9}{4} E$ (α)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Στις θλιψές $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F'_{ελ} = W$

$$\Rightarrow \boxed{k \Delta l = mg} \Rightarrow \Delta l = \frac{mg}{k} = 0,2 \text{ m}$$

ΘΜΚΕ από τη ΘΙ έως την κάτω ακραία

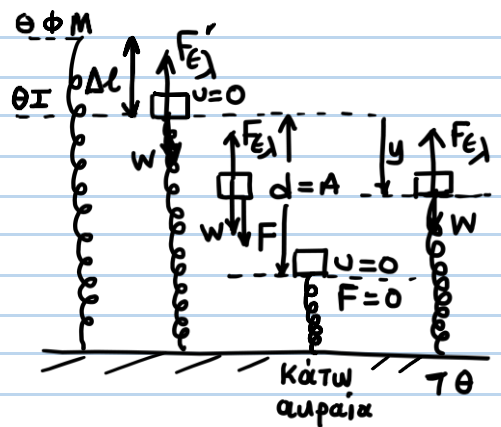
που το σώμα ακινητοποιείται

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_{F_{ελ}} + W_F$$

$$0 - 0 = mgd + U_{ελ\alphaρχ} - U_{ελ\tauελ} + W_F$$

$$0 = mgd + \frac{1}{2} k \Delta l^2 - \frac{1}{2} k (\Delta l + d)^2 + W_F$$

$$0 = \left(20 \cdot 0,2 + \frac{1}{2} 200 \cdot \frac{1}{100} - \frac{1}{2} 200 \frac{9}{100} \right) \text{ J} + W_F \Rightarrow \boxed{W_F = 4 \text{ J}}$$



Γ2 Στις τωχαία θέση (ΤΘ) ισχύει:

$$\Sigma F_y = w - F_{ελ} = mg - k(\Delta l + y) = \underbrace{mg - k \Delta l}_{=0} - k y \Rightarrow \boxed{\Sigma F_y = -k y = -D y}$$

$D = k$

Γ3) Ισχύει: $D = k = m \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{k/m} = 10 \text{ rad/s}$ και $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{5} \text{ sec}$

Για το πλάτος της ταλάντωσης ισχύει: $A = d = 0,2 \text{ m}$

Για την αατ ισχύει $y = A \sin(\omega t + \phi_0)$

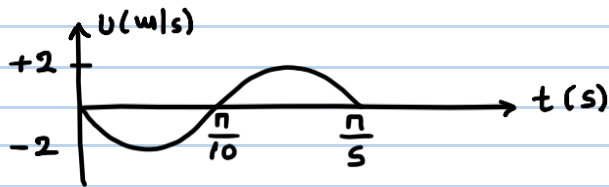
Τη χρονική στιγμή $t=0$ $y=+A \Rightarrow A \sin \varphi_0 = +A \Rightarrow \sin \varphi_0 = 1$

$$\sin \varphi_0 = \sin \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

Για την εξίσωση της ταχύτητας ισχύει:

$$v = v_{\max} \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ όπου } v_{\max} = \omega A = 2 \text{ m/s}$$

$$v = 2 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ SI}$$



Γ4] Για τον ρυθμό μεταβολής κινητικής ενέργειας ισχύει:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{\Sigma F}}{dt} = \frac{\Sigma F dy}{dt} = \Sigma F \cdot v = -k \cdot y \cdot v.$$

$$\text{Έχουμε: } |a| = \frac{a_{\max}}{2} \Rightarrow \omega^2 |y| = \frac{\omega^2 A}{2} \Rightarrow |y| = \frac{A}{2}$$

Για $2^{\text{η}}$ φορά $|a| = \frac{a_{\max}}{2}$ όταν $y < 0 \rightarrow y = -A/2 = -0,1 \text{ m}$ και $v < 0$

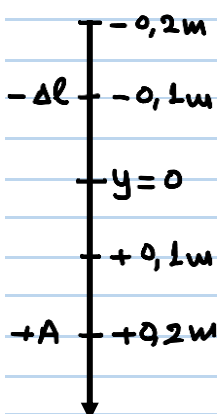
$$\text{Επίσης } E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k y^2 \Rightarrow v = \pm \omega \sqrt{A^2 - y^2}$$

$$\text{όμως } v < 0 \rightarrow v = -\omega \sqrt{A^2 - (-A/2)^2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \omega A = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_{\max} \Rightarrow v = -\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\text{Άρα } \frac{dK}{dt} = -k \cdot y \cdot v = -200(-0,1)(-\sqrt{3}) \text{ J/s} \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = -20\sqrt{3} \text{ J/s}}$$

Γ5] Όταν $|\Sigma F| = W \Rightarrow k|y| = mg \Rightarrow |y| = \frac{mg}{k} = \Delta l = 0,1 \text{ m}$

άρα $y = \pm 0,1 \text{ m}$



Όταν $y = -0,1 \text{ m} = -\Delta l$ το σπρίνγκ βρίσκεται στη

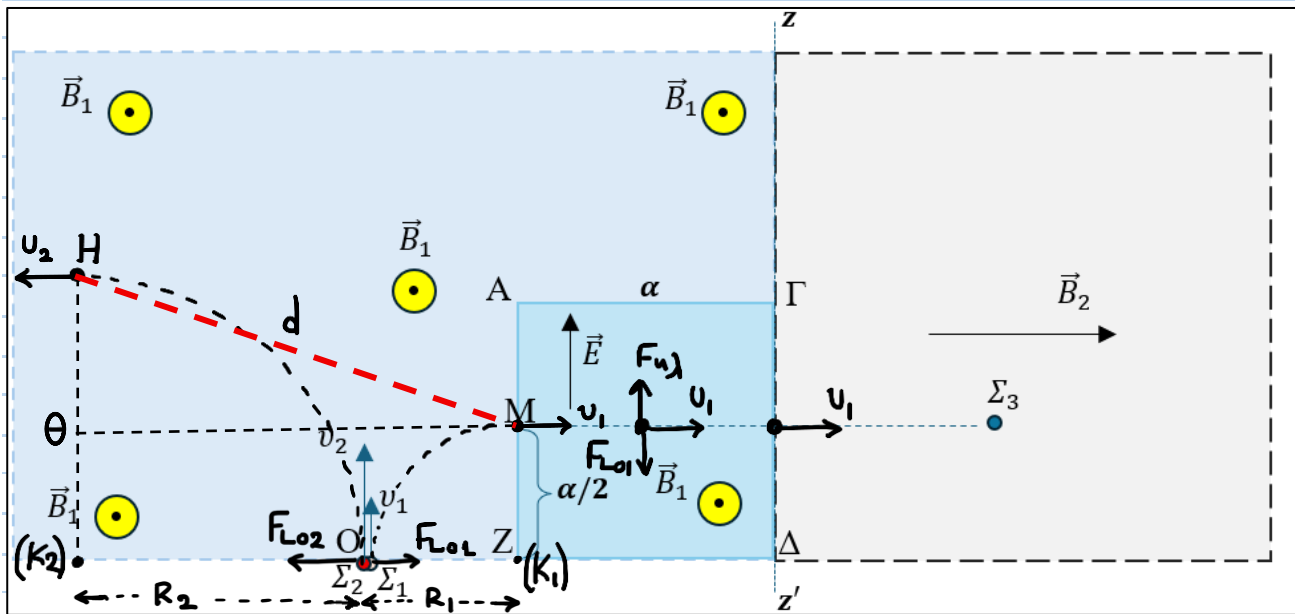
$$\theta \Phi M \text{ άρα } \underline{y_{\theta \Phi M} = 0} \rightarrow \boxed{U_{E\lambda} = 0}$$

Όταν $y = +0,1 \text{ m}$ το σπρίνγκ αλέχει από τη

$$\theta \Phi M \text{ } y_{\theta \Phi M} = \Delta l + y = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Άρα } U_{E\lambda} = \frac{1}{2} k (\Delta l + y)^2 = \frac{1}{2} 200 \frac{4}{100} \text{ J} \Rightarrow \boxed{U_{E\lambda} = 4 \text{ J}}$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1 α) Το σωματίδιο Σ_1 διαγράφει τεταρτοκύκλιο ακτίνας R_1 έχοντας ως κέντρο (K_1) του τμήματος της κυκλικής τροχιάς των κορυφή Z . Ισχύει: $R_1 = OZ = \frac{\alpha}{2}$

$$\text{όπου } R_1 = \frac{m_1 v_1}{|q_1| \cdot B_1} = \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 500}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 1} \text{ m} \Rightarrow R_1 = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{όπως } R_1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 2R_1 = 1 \text{ m}}$$

β) Αφού το σωματίδιο Σ_1 διαγράφει τεταρτοκύκλιο έχουμε $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$
 Ισχύει $\theta = \omega_1 \Delta t \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{T_1} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T_1}{4}$

$$\text{όπου } T_1 = \frac{2\pi m_1}{B_1 |q_1|} = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{1 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \text{ sec} = 2\pi \cdot 10^{-3} \text{ sec} \quad \text{άρα } \boxed{\Delta t = \frac{\pi}{2} \cdot 10^{-3} \text{ sec} = 5\pi \cdot 10^{-4} \text{ sec}}$$

γ) Τα σωματίδια Σ_1, Σ_2 έχουν την ίδια περίοδο ($T_1 = T_2$) αφού έχουν ίσες μάζες ($m_1 = m_2$) και αντίθετα φορτία ($q_2 = -q_1$).

Κινούμενα ταυτόχρονα στο ομπ \vec{B}_1 διαγράφουν τεταρτοκύκλια.

$$\text{Για το } \Sigma_1: R_1 = \frac{m_1 v_1}{|q_1| \cdot B_1} = 0,5 \text{ m}$$

$$\text{Για το } \Sigma_2: R_2 = \frac{m_2 v_2}{|q_2| \cdot B_1} \quad \text{όμως } v_2 = 1000 \text{ m/s} = 2v_1$$

$$\text{Άρα } R_2 = \frac{m_2 \cdot 2v_1}{|q_2| \cdot B_1} = 2R_1 \Rightarrow R_2 = 2R_1 = 1 \text{ m.}$$

Τα σφαιρίδια απέχουν απόσταση $d = (HM)$ για την οποία ισχύει:

$$(HM)^2 = (HO)^2 + (OM)^2 \quad \text{όπου } (OM) = R_2 + R_1 = 3R_1,$$

$$\text{και } (HO) = R_2 - R_1 = R_1$$

$$(HM)^2 = R_1^2 + (3R_1)^2 \Rightarrow (HM) = \sqrt{10} R_1 \Rightarrow \boxed{d = (HM) = R_1 \sqrt{10} = 0,5 \sqrt{10} \text{ m}}$$

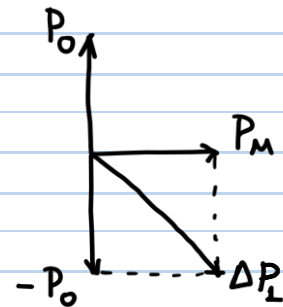
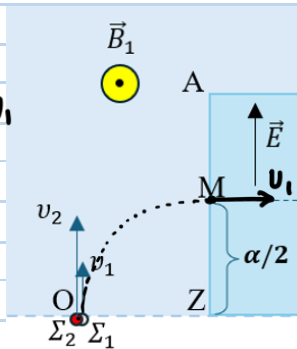
Δ2 Ισχύει για τα μέτρα

των ορμών $P_0 = P_M = P_1 = m_1 v_1$

$$\Delta \vec{P}_1 = \vec{P}_M - \vec{P}_0 = \vec{P}_M + (-\vec{P}_0)$$

Για το μέτρο:

$$|\Delta \vec{P}_1| = \sqrt{P_M^2 + P_0^2} = \sqrt{2} P_1$$



$$|\Delta \vec{P}_1| = P_1 \sqrt{2} = m_1 v_1 \sqrt{2} = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 500 \sqrt{2} \text{ kg m/s} \Rightarrow \boxed{|\Delta \vec{P}_1| = 10^{-6} \sqrt{2} \text{ kg m/s}}$$

Δ3 Στον χώρο που συνυπάρχουν τα πεδία \vec{E} και \vec{B}_1 το σφαιρίδιο Σ_1

εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Άρα $\Sigma \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow F_{ηλ} = F_{οι}$

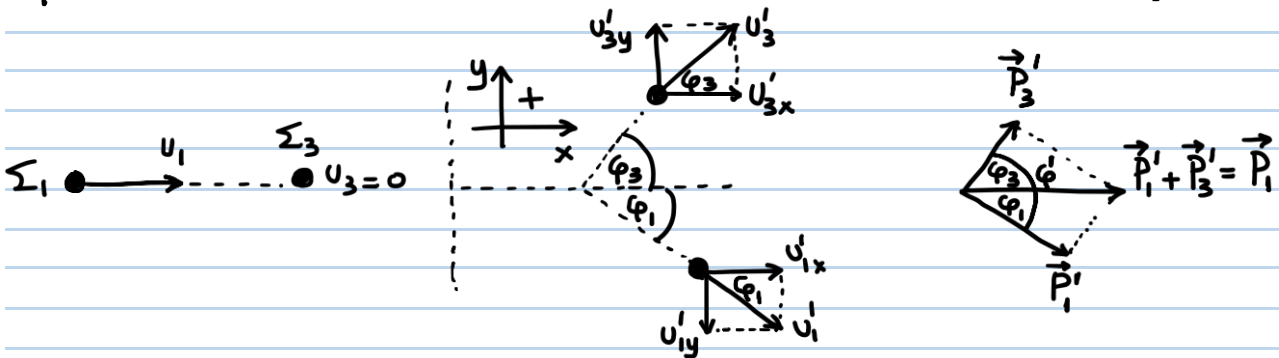
$$\Rightarrow |q_1| E = B_1 v_1 |q_1| \Rightarrow E = B_1 v_1 \Rightarrow \boxed{E = 500 \text{ V/m}}$$

Δ4 Επειδή το σφαιρίδιο Σ_1 εισέρχεται στο ομπ \vec{B}_2 με ταχύτητα

\vec{v}_1 παράλληλη στις δυναμικές γραμμές ($\vec{v}_1 \parallel \vec{B}_2$) δε θα δεχθεί

δύναμη Lorentz ($\vec{F}_{Lorentz} = \vec{0}$) οπότε συνεχίζει να κινείται ευθύγραμμα

με σταθερή ταχύτητα. Για την κρούση των σφαιριδίων Σ_1, Σ_3 ισχύει:



Από τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας ισχύει:

$$K_{οληριν} = K_{ολημετα} \Rightarrow k_1 = k_1' + k_3' \Rightarrow \frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{P_1'^2}{2m_1} + \frac{P_3'^2}{2m_3} \quad (m_1 = m_3)$$

$$\Rightarrow P_1^2 = P_1'^2 + P_3'^2 \quad \textcircled{1}$$

Από την αρχή διατήρησης ορμής ισχύει: $\vec{P}_{οληριν} = \vec{P}_{ολμετα} \Rightarrow \vec{P}_1 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_3$

$$\Rightarrow P_1^2 = P_1'^2 + P_3'^2 + 2P_1'P_3' \cos \varphi', \quad \varphi' = \varphi_1 + \varphi_3$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 2P_1'P_3' \cos \varphi' = 0$$

όμως $2P_1'P_3' \neq 0$ οπότε $\cos \varphi' = 0 \Rightarrow \varphi' = 90^\circ \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_3 = 90^\circ \Rightarrow \varphi_3 = 57^\circ$

Στον άξονα y ισχύει: $\vec{P}_{οληριν} = \vec{P}_{ολμετα} \Rightarrow 0 = \vec{P}'_{3y} + \vec{P}'_{1y}$

$$\Rightarrow 0 = m_3 v'_{3y} - m_1 v'_{1y} \Rightarrow v'_3 \sin \varphi_3 = v'_1 \sin \varphi_1 \Rightarrow 0,8 v'_3 = 0,6 v'_1 \Rightarrow v'_3 = \frac{3}{4} v'_1 \quad \textcircled{2}$$

Στον άξονα x ισχύει: $\vec{P}_{οληριν} = \vec{P}_{ολμετα} \Rightarrow \vec{P}_1 = \vec{P}'_{1x} + \vec{P}'_{3x}$

$$\Rightarrow m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_3 v'_{3x} \Rightarrow v_1 = v'_1 \cos \varphi_1 + v'_3 \cos \varphi_3 \Rightarrow v_1 = 0,8 v'_1 + \frac{3}{4} v'_1 \cdot 0,6$$

$$\Rightarrow v_1 = 0,8 v'_1 + 0,45 v'_1 \Rightarrow v_1 = 1,25 v'_1 \Rightarrow v'_1 = \frac{4}{5} v_1 \Rightarrow \underline{v'_1 = 400 \text{ m/s}}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow v'_3 = \frac{3}{4} v_1 \Rightarrow \underline{v'_3 = 300 \text{ m/s}}$$

Για το σωματίδιο Σ_3 ισχύει: $x_3 = d = v'_3 \cdot t \Rightarrow t = \frac{d}{v'_3} = \frac{0,6}{300} \text{ sec} \Rightarrow t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$

$$\text{όμως } t = NT_2 = 5 \frac{2\pi m_1}{B_2 |q|} \Rightarrow B_2 = \frac{10\pi m_1}{t \cdot |q|} = \frac{10\pi \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}} \text{ T} \Rightarrow \boxed{B_2 = 5\pi \text{ T}}$$

Δ5] Το σωματίδιο Σ_1 εκτελεί ελλειψοειδή κίνηση.

Κατά μήκος των δυναμικών γραμμών διανύει

απόσταση: $x_1 = v'_{1x} \cdot t = v'_1 \cos \varphi_1 \cdot t = 400 \cdot 0,8 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow \boxed{x_1 = 0,64 \text{ m}}$

Το μήκος της τροχιάς είναι: $S_1 = v'_1 \cdot t = 400 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow \boxed{S_1 = 0,8 \text{ m}}$

