Λύσεις Διαγωνίσματος Β' Λυκείου 21-12-2025

Θέμα Α

Α1 1) Σ 2) Λ 3) Λ 4) Σ 5) Λ

Α2 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = \frac{1}{4}|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2$

Έχουμε: $\frac{1}{4}|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2 - \frac{1}{4}|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 - \frac{1}{4}(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 =$

$= \frac{1}{4}(\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2) - \frac{1}{4}(\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2) =$

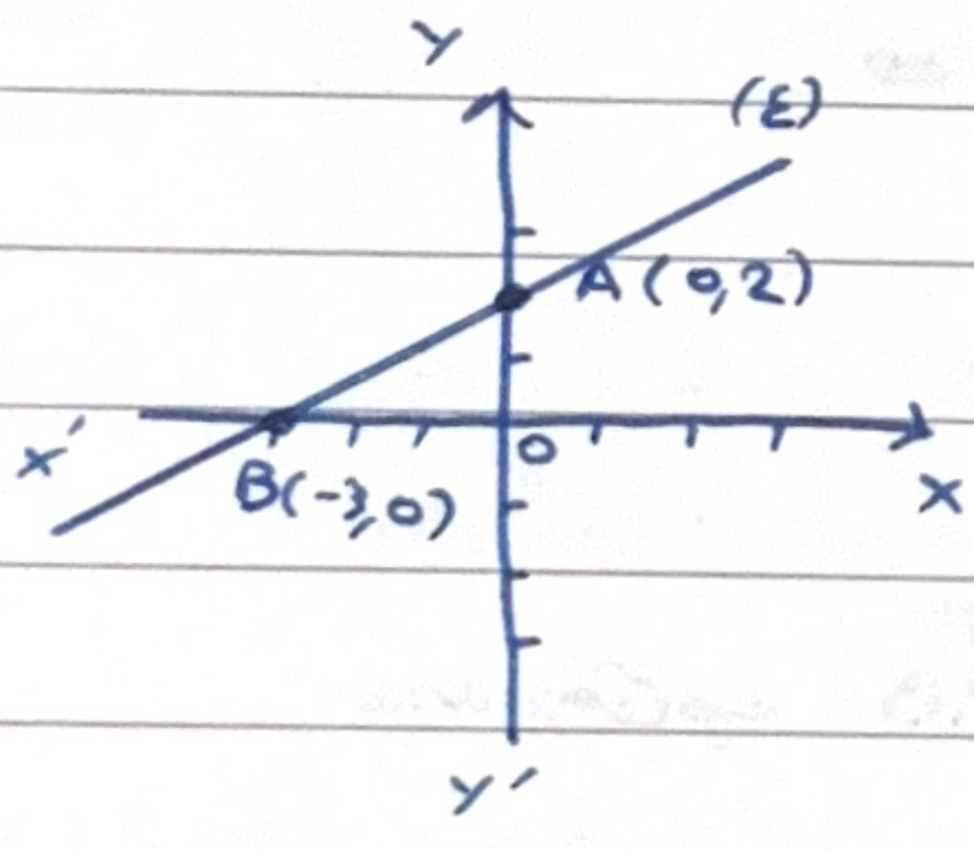
$= \cancel{\frac{1}{4}\vec{\alpha}^2} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \cancel{\frac{1}{4}\vec{\beta}^2} - \cancel{\frac{1}{4}\vec{\alpha}^2} + \frac{1}{2}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} - \cancel{\frac{1}{4}\vec{\beta}^2} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

Α3 $2x-3y+6=0$

1) Βρίσκω τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες

Για $y'y$ έχω: $-3y+6=0 \Rightarrow y=2$ Άρα $A(0,2)$

Για $x'x$ έχω: $2x+6=0 \Rightarrow x=-3$ Άρα $B(-3,0)$



2) $E_{OAB} = \frac{1}{2}\cdot|OA|\cdot|OB| = \frac{1}{2}\cdot|-3|\cdot|2| = 3$ τ.μ.

Α4 Βρίσκω το σημείο τομής των ευθειών

$\begin{cases} \varepsilon_1: 3x+2y+4=0 \\ \varepsilon_2: 5x+3y+5=0 \end{cases} \overset{\cdot(-3)}{\underset{\cdot 2}{\Rightarrow}} \begin{cases} -9x-6y-12=0 \\ 10x+6y+10=0 \end{cases} \overset{(+)}{} \quad x-2=0 \Rightarrow x=2$

Για $x=2$ έχω: $6+2y+4=0 \Rightarrow 2y=-10 \Rightarrow y=-5$

Άρα το σημείο τομής των ευθειών είναι το $A(2,-5)$

Αφού η ζητούμενη ευθεία είναι κάθετη στην $(\varepsilon_3)\ 2x-5y-15=0$

έχω: $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{\varepsilon_3} = -1$

$\lambda_{\varepsilon_3} = \frac{2}{5}$

Άρα $\lambda_\varepsilon \cdot \frac{2}{5} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{5}{2}$

Επομένως έχω:

$$y - y_0 = \lambda_\varepsilon \cdot (x - x_0) \Rightarrow y + 5 = -\frac{5}{2}(x-2) \Leftrightarrow$$

$$y = -\frac{5}{2}x + 5 - 5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}x.$$

Θέμα Β

Β1) 1) $\lambda_{OA} = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

(ΟΑ): $y - y_A = \lambda_{OA} \cdot (x - x_A)$

$$y - \sqrt{3} = \sqrt{3}(x-1) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - \cancel{\sqrt{3}} + \cancel{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x$$

$\varepsilon\varphi\omega = \lambda_{OA} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \sqrt{3} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{3}$

Επομένως η γωνία που σχηματίζει η ΟΑ με τον άξονα x'x είναι $\omega = \frac{\pi}{3}$ ή $60°$.

2) $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\cancel{\sqrt{3}} - 1 - \cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} + \cancel{1} - \cancel{1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(ΑΒ): $y - y_A = \lambda_{AB} \cdot (x - x_A) \Rightarrow y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - 1) \Leftrightarrow$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

3) $\lambda_{OA} \cdot \lambda_{AB} = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -1$

Άρα $OA \perp AB$. Επομένως το τρίγωνο $O\hat{A}B$ ορθογώνιο

Βρίσκω τα μέτρα των ΟΑ και ΑΒ

$$\left.\begin{aligned} |OA| &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} \\ |AB| &= \sqrt{(\sqrt{3} + \cancel{1} - \cancel{1})^2 + (\cancel{\sqrt{3}} - 1 - \cancel{\sqrt{3}})^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} \end{aligned}\right\} |OA| = |AB|$$

Επομένως το $\overset{\triangle}{O\hat{A}B}$ και ισοσκελές.

4) Αφού το $\overset{\triangle}{O\hat{A}B}$ ισοσκελές έχω ότι η $B\hat{O}A$ γωνία $45°$ και αφού ΟΑ σχηματίζει γωνία $60°$ με τον x'x. έχω ότι $x\hat{O}B = 15°$.

tettris

Αρα $\varepsilon\varphi 15^\circ = \lambda_{OB} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$.

B2) 1) $(\varepsilon_1): \ kx - y + 1 = 0$

$(\varepsilon_2): \ (k+1)x - (1-k)y + 4 = 0$

Εστω $\vec{\delta_1} \parallel \varepsilon_1$ αρα $\vec{\delta_1} = (1, k)$ και

$\vec{\delta_2} \parallel \varepsilon_2$ αρα $\vec{\delta_2} = (1-k, k+1)$

2) $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}}) = \dfrac{|\vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}|}{|\vec{\delta_1}|\cdot|\vec{\delta_2}|} = \dfrac{|1-k+k\cdot(k+1)|}{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(1-k)^2+(k+1)^2}} =$

$= \dfrac{|1 \cancel{-k} + k^2 \cancel{+k}|}{\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{1-\cancel{2k}+k^2+k^2+\cancel{2k}+1}} = \dfrac{|k^2+1|}{\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{2(k^2+1)}} = \dfrac{k^2+1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{k^2+1}^{\,2}} =$

$= \dfrac{\cancel{k^2+1}}{\sqrt{2}\cdot(\cancel{k^2+1})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Αρα $(\widehat{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) = (\widehat{\vec{\delta_1}, \vec{\delta_2}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Θέμα Γ

Γ1) 1) Λ 2) Σ 3) Σ 4) Λ 5) Σ

Γ2) $\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \dfrac{1}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \sigma\upsilon\nu^2\omega.$

Γ3) A) $\eta\mu^3 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$

Θέτω $\eta\mu x = \omega$ Αρα $\omega^3 - 3\omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega^3 - 3\omega + 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1) - 3(\omega-1) = 0 \Leftrightarrow$

$(\omega-1)\cdot(\omega^2+\omega-2) = 0$
- $\omega - 1 = 0 \Rightarrow \omega = 1$
- $\omega^2+\omega-2 = 0$ → $\omega = 1$ / $\omega = -2$ Α.ορ.

Αρα $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\dfrac{\pi}{2}$

$x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ή $x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}}$

tettris

B) $\sigma\varphi x \cdot (\varepsilon\varphi^2 x - 3)\cdot(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

Πρέπει $x \neq k\pi$ και $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Άρα $\sigma\varphi x = 0$ ή $\varepsilon\varphi^2 x - 3 = 0$ ή $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

• $\sigma\varphi x = 0 \Rightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi \frac{\pi}{2}$. Άρα $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ (Απορρίπτεται)

• $\varepsilon\varphi^2 x = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ ή $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$.

→ $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3}$ Άρα $\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}}$

→ $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{3})$

Άρα $\boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}}$

• $2\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3})$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}$. Άρα $\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}}$

Θέμα Δ

Δ1) • $\sigma\upsilon\nu(2\pi + \theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$ • $\eta\mu(\pi + \theta) = -\eta\mu\theta$

• $\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\eta\mu\theta$ • $\sigma\varphi(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\varepsilon\varphi\theta$

• $\varepsilon\varphi(\pi - \theta) = -\varepsilon\varphi\theta$ • $\sigma\upsilon\nu(-\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta$.

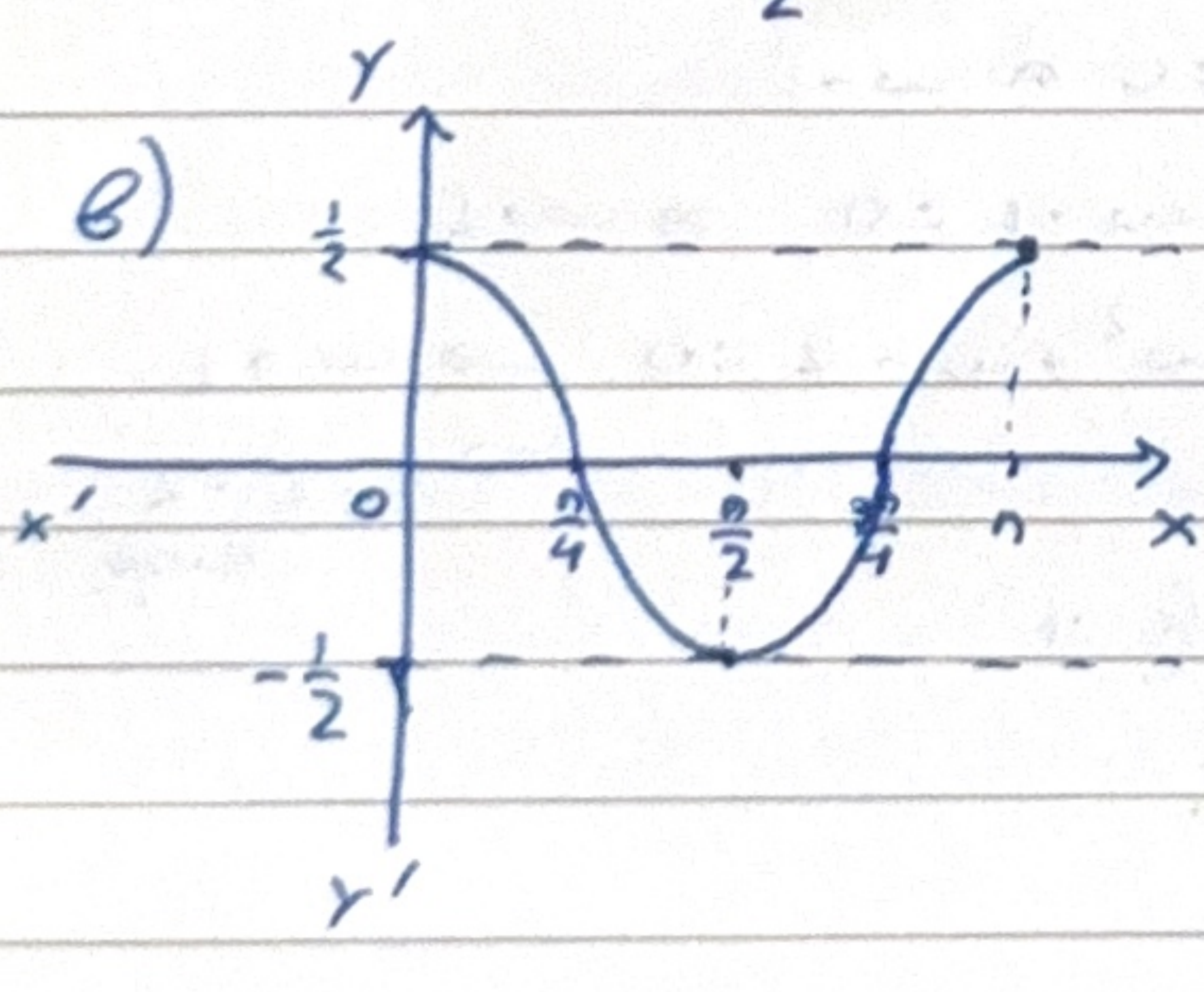
Άρα $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta \cdot (-\eta\mu\theta)\cdot(-\varepsilon\varphi\theta)}{-\eta\mu\theta \cdot (-\varepsilon\varphi\theta)\cdot \sigma\upsilon\nu\theta} = 1$

Δ2) $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2x$. (είναι $\rho = \frac{1}{2}$, $\omega = 2$)

α) $f_{max} = \frac{1}{2}$ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.

$f_{min} = -\frac{1}{2}$

β)



γ) Αφού το $f_{max} = 1/2$ και $f_{min} = -\frac{1}{2}$ η συνάρτηση δεν μπορεί να δώσει τιμή 1.

Δ3) Είναι $συν\frac{17π}{10} = συν\left(2π - \frac{3π}{10}\right) = συν\left(-\frac{3π}{10}\right) = συν\frac{3π}{10}$

Είναι : $0 < \frac{π}{6} < \frac{π}{4} < \frac{3π}{10} < \frac{π}{2}$.

Η $f(x) = συνx$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, \frac{π}{2})$

άρα $συν\frac{π}{6} > συν\frac{π}{4} > συν\frac{3π}{10}$

ή $συν\frac{3π}{10} < συν\frac{π}{4} < συν\frac{π}{6}$.