ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

6/12/25

Α4) 1) Λ 2) Σ 3) Σ 4) Λ 5) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1) f συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξη συνεχών
f παραγ. στο $(1,2)$ ως πράξη παραγ.
$f(1) = 3^0 + 1 - 5 + 3 = 0$
$f(2) = 3 + 4 - 10 + 3 = 0$
} ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle

Β2) Για να υπάρχει εφαπτομένη $// x'x$ πρέπει $f'(\xi) = 0$
από Θ. Rolle στο Β1 υπάρχει 1 τουλ. $\xi \in (1,2)$ τ.ω. $f'(\xi) = 0$
$f'(x) = 3^{x-1} \ln 3 + 2x - 5$
$f''(x) = 3^{x-1} (\ln 3)^2 + 2 > 0$ άρα η f' ↑ επομένως το ξ μοναδική ρίζα

Β3) Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 3 ρίζες, τις ρ_1, ρ_2, ρ_3 με $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ κ' $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$

Rolle Rolle

$f'(\xi_1) = 0$ $f'(\xi_2) = 0$

άρα η $f'(x) = 0$ έχει 2 τουλάχιστον ρίζες, άτοπο γιατί f' ↑
άρα η $f(x) = 0$ έχει 2 το πολύ ρίζες

Β4) $h(x) = g(x) \Leftrightarrow 3^{x-1} = 5x - x^2 - 3 \Leftrightarrow 3^{x-1} + x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
Είναι $f(1) = 0$, $f(2) = 0$ άρα 2 τουλάχιστον κοινά σημεία τα
$A(1,0)$ κ' $B(2,0)$
κ' επειδή από Β3, η f έχει 2 το πολύ ρίζες $\Rightarrow$ η f έχει ακριβώς 2 ρίζες άρα 2 κοινά σημεία των C_h κ' C_g.

ΘΕΜΑ Γ

$y = x+6$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ άρα $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-x\right) = 6 \end{cases}$

Γ1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6f(x)\ln(1+e^x)}{x^2 f(x) - x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2 \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{\ln(1+e^x)}{x}}{x^2\left(f(x)-x\right)} = 6 \cdot \dfrac{1\cdot 1}{6} = 1$, γιατί

$\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$

άρα $g(x) = \begin{cases} x + x^2 ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Γ2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x^2 ημ\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 + x\,ημ\frac{1}{x}\right) = 1+0 = 1 \in \mathbb{R}$

άρα $g'(0) = 1$

Για $x \neq 0$: $g'(x) = 1 + 2x\,ημ\frac{1}{x} + x^2 συν\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + 2x\,ημ\frac{1}{x} - συν\frac{1}{x}$

Γ3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x f(x) - e f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x f(x) - e^x f(1) + e^x f(1) - e f(1)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1}\left[e^x\left(\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) + f(1)\dfrac{e^x - e}{x-1}\right] = e\cdot f'(1) + f(1)e$

γιατί $\cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 1} e^x = e$

$\cdot \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ επειδή f παραγωγίσιμη στο 1

Γ4) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) + f'(x-h)(-1)}{2h} =$

$\dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x-h)}{h} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{h\to 0}\left[\underbrace{\dfrac{f'(x+h)-f'(x)}{h}}_{f''(x)} - \underbrace{\dfrac{f'(x-h)-f'(x)}{h}}_{-h=u}\right] =$

$-h=u$: $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f'(x-u)-f'(x)}{-u} = -f''(x)$

$\dfrac{1}{2}\left(f''(x) + f''(x)\right) = f''(x)$

Γ5) f ικανοποιεί το Rolle στο $[0,1]$ άρα $f(0)=f(1)$

Έστω $h(x)=f(x)-4x^2+4x$ στο $[0,1]$

h συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξη συνεχών

h παραγ. στο $(0,1)$ ως πράξη παραγ.

$\left.\begin{array}{l} h(0)=f(0) \\ h(1)=f(1) \end{array}\right\} h(0)=h(1)$

$\Longrightarrow$ από Θ. Rolle υπάρχει 1 τουλ. $x_0\in(0,1)$ τ.ω. $h'(x_0)=0 \Longrightarrow$

$f'(x_0)-8x_0+4=0$

Έστω ότι η $h'(x)=0$ έχει 2 ρίζες, τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$ κ' $h'(\rho_1)=h'(\rho_2)=0$

Rolle $h''(\rho_3)=0$ με $h''(x)=f''(x)-8\neq 0$ άρα άτοπο

Επομένως η εξίσωση $f'(x)-8x+4=0$ έχει ακριβώς 1 ρίζα

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) i) $t'(x)=\ln x+1-1=\ln x=g(x)$

ii) Θεωρώ $w(x)=x\ln x-x-\ln x$ στο $[1,e]$

w συνεχής στο $[1,e]$, w παραγ. στο $(1,e)$

$\left.\begin{array}{l} w(1)=-1 \\ w(e)=-1 \end{array}\right\} w(1)=w(e)$

$\Longrightarrow$ Θ. Rolle υπάρχει 1 τουλ. $x_0\in(1,e)$ τ.ω.

$w'(x_0)=0 \overset{1}{\iff} \ln x_0-\frac{1}{x_0}=0 \iff$ $\boxed{\ln x_0=\frac{1}{x_0}}$ (2)

$w'(x)=\ln x+1-1-\frac{1}{x}=\ln x-\frac{1}{x}$ (1)

Για κάθε $x>0$: $w''(x)=\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ άρα x_0 μοναδική ρίζα

Δ2)

$f(x_0)=\ln x_0(x_0+1)-\ln x_0-1=x_0\ln x_0+\ln x_0-\ln x_0-1\overset{2}{=}$

$x_0\frac{1}{x_0}-1=1-1=0$

$f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}$ άρα $f'(x_0)=\ln x_0-\frac{1}{x_0}\overset{2}{=}0$

$f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ άρα $\begin{cases} x>x_0 \overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow} f'(x)>f'(x_0) \iff f'(x)>0 \\ x<x_0 \overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow} f'(x)<f'(x_0) \iff f'(x)<0. \end{cases}$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Δ3) $g(x)=h(x) \Leftrightarrow xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$

Αν $x\leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί $\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}>0$ κ $xe^{-x}\leq 0$

Για $x>0$: $xe^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow xe^{-x}=\frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow$

$xe=x_0^{x+1} \Leftrightarrow \ln xe=\ln x_0^{x+1} \Leftrightarrow \ln x+\ln e=(x+1)\ln x_0 \Leftrightarrow$
$(x+1)\ln x_0-\ln x-1=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=x_0$
γιατί x_0 μοναδική ρίζα της f

Ν.δ.ο. $g'(x_0)=h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\ln\frac{x_0}{e} \Leftrightarrow$
$e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}(\ln x_0-1) \Leftrightarrow$
$e^{-x_0}(1-x_0)=\frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}}\left(\frac{1}{x_0}-1\right) \Leftrightarrow e(1-x_0)=x_0^{x_0+1}\left(\frac{1-x_0}{x_0}\right) \Leftrightarrow$

$e(1-x_0)=x_0^{x_0}(1-x_0) \underset{1-x_0\neq 0}{\overset{x_0\in(1,e)}{\Longleftrightarrow}} e=x_0^{x_0} \Leftrightarrow \ln e=\ln x_0^{x_0} \Leftrightarrow$

$1=x_0\ln x_0 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 1=1$ ισχύει

Δ4) $g(x)=xe^{-x}$, $A_g=\mathbb{R}$ κ συνεχής άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$

Δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$