

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
6/12/2025

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
- A2. Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f .
- A3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v$, $v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = v \cdot x^{v-1}$.
- A4. Να χαρακτηρίσετε της επόμενες προτάσεις ως σωστές ή λάθος
1. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών, μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , βρίσκεται ακριβώς μια ρίζα της f'
 2. Η γραφική παράσταση μια πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη
 3. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της
 4. Η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f δεν έχει με τη C_f κανένα κοινό σημείο.
 5. Η κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f έχει ένα το πολύ κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5 – 5 – 5 – 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3^{x-1} + x^2 - 5x + 3$.

- B1. Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[1, 2]$.
- B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο το πολύ ρίζες.
- B4. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $g(x) = 5x - x^2 - 3$ και $h(x) = 3^{x-1}$.

(Μονάδες 5 – 5 – 7 – 8)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστά :

- η $y = x + 6$ ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και η f είναι παραγωγίσιμη για $x=1$,
- $g(x) = \begin{cases} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \right) \cdot x + x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6f(x) \cdot \ln(1+e^x)}{x^2 f(x) - x^3} - 1, & x = 0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x + x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Γ2. Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 0$. Στη συνέχεια να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g .

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x) - e f(1)}{x - 1}$.

Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη

Γ4. Να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$.

Γ5. Αν η f ικανοποιεί το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[0,1]$ και $f''(x) \neq 8$ τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) - 8x + 4 = 0$ παρουσιάζει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

(Μονάδες 5 – 5 – 4 – 6 – 5)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $t(x) = x \ln x - x$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $q(x) = \ln x$.

ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x}$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1$, η οποία έχει μοναδική ρίζα.

Να δείξετε ότι το x_0 του ερωτήματος Δ1 ii) είναι ρίζα και της f και της f' .

Στη συνέχεια να βρείτε το πρόσημο της f' .

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x \cdot e^{-x}$ και $h(x) = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1}$ έχουν

ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Δ4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g .

(Μονάδες 6 – 6 – 8 – 5)