ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΤΙΚΟΥ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ 5/01/26

Β) i) Λ   ii) Λ   iii) Σ   iv) Λ   v) Σ

ΘΕΜΑ Β

Α) $(|\alpha-1|-3)x=\alpha+2$

i) $\alpha=0$: $(|0-1|-3)x=0+2 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$

$\alpha=5$: $(|5-1|-3)x=5+2 \Leftrightarrow x=7$

ii) $|\alpha-1|=3 \Leftrightarrow (\alpha-1=3$ ή $\alpha-1=-3) \Leftrightarrow (\alpha=4$ ή $\alpha=-2)$

iii) Για $\alpha=4$: $0x=6$ αδύνατη

Για $\alpha=-2$: $0x=0$ ταυτότητα

Β) i) $1<x<2 \Leftrightarrow 0<x-1<1$ άρα $|x-1|=x-1$ ①

$1<x<2 \Leftrightarrow -1<x-2<0$ άρα $|x-2|=-x+2$ ②

$A=|x-1|-|x-2| \overset{①}{\underset{②}{=}} x-1-(-x+2)=2x-3$

ii) $x<1 \Leftrightarrow x-1<0$ άρα $|x-1|=-x+1$

$x<1 \Leftrightarrow x-2<-1$ άρα $|x-2|=-x+2$

$A=|x-1|-|x-2|=-x+1-(-x+2)=-1$

ΘΕΜΑ Γ

Α) $\sqrt{5}>2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2>2^2 \Leftrightarrow 5>4$ ισχύει άρα $\sqrt{5}>2$

$9-4\sqrt{5}=9-2\cdot2\sqrt{5}=5+4-2\cdot2\sqrt{5}=\sqrt{5}^2+2^2-2\cdot2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-2)^2$

άρα $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2$

Β) i) $2|x-3|-5|3-x|+3=0 \Leftrightarrow 2|x-3|-5|x-3|+3=0 \Leftrightarrow$

$-3|x-3|+3=0 \Leftrightarrow |x-3|=1 \Leftrightarrow (x-3=1$ ή $x-3=-1) \Leftrightarrow (x=4$ ή $x=2)$

ii) $\big|\underbrace{|x+1|+|x-2|}_{>0}\big|-3=|-x-1| \Leftrightarrow |x+1|+|x-2|-3=|x+1| \Leftrightarrow$

$|x-2|-3=0 \Leftrightarrow |x-2|=3 \Leftrightarrow (x-2=3$ ή $x-2=-3) \Leftrightarrow (x=5$ ή $x=-1)$

iii) Πρέπει $x^5+32=0$ ή $x+\sqrt[3]{3+\sqrt{30-\sqrt{20+\sqrt{23+\sqrt[3]{8}}}}}=0$ ή $x^3+2x^2=0$

$x^5=-32 \Leftrightarrow$

$x=-\sqrt[5]{32} \Leftrightarrow$

$x=-2$

$x+\sqrt[3]{3+\sqrt{30-\sqrt{20+\sqrt{23+2}}}}=0$

$x+\sqrt[3]{3+\sqrt{30-\sqrt{20+\sqrt{25}}}}=0$

$x+\sqrt[3]{3+\sqrt{30-\sqrt{20+5}}}=0$

$x+\sqrt[3]{3+\sqrt{30-5}}=0$

$x+\sqrt[3]{3+5}=0 \Leftrightarrow x+\sqrt[3]{8}=0 \Leftrightarrow$

$x=-2$

$x^2(x+2)=0 \Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x=-2$

άρα $\boxed{x=-2}$

iv) $(x-1)^4-27(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)^3-27\right]=0 \Leftrightarrow$

$x-1=0 \Leftrightarrow$ ή $(x-1)^3-27=0 \Leftrightarrow (x-1)^3=27 \Leftrightarrow (x-1)=\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow$

$x=1$ $\qquad x-1=3 \Leftrightarrow x=4$

v) $(|x-3|-2)^4=81 \Leftrightarrow |x-3|-2=\pm\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow$

$|x-3|-2=3$ ή $|x-3|-2=-3 \Leftrightarrow$

$|x-3|=5 \Leftrightarrow$ $\qquad |x-3|=-1$ αδύνατη

$x-3=\pm 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-2 \end{cases}$

ΘΕΜΑ Δ

A) i) $x^2+x+1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4x^2+4x+4 \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2+4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \geq 0$ ισχύει

ii) $x^2-x+1 \geq 3/4 \Leftrightarrow 4x^2-4x+4 \geq 3 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0$ ισχύει

Οι ισότητες ισχύουν όταν: $2x+1=0$ ή $2x-1=0$

$x=-\frac{1}{2}$ $x=\frac{1}{2}$

B) Είναι

$$\left.\begin{aligned} x^2+x+1 \geq 3/4 > 0 \\ x^2-x+1 \geq 3/4 > 0 \end{aligned}\right\} (\times)$$

$$(x^2+x+1)(x^2-x+1) > 9/16$$

γιατί οι ισότητες στις δύο ανισότητες ισχύουν για διαφορετικό x

Γ) $K = \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1}$

i) Πρέπει $x^2-1 \neq 0$. Έστω $x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

άρα $x \neq \pm 1$

ii) $K = \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}} = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

από (B) έχουμε $(x^2+x+1)(x^2-x+1) > \frac{9}{16}$ άρα $K > \frac{9}{16}$

Επομένως δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$