ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ (18/1/2026)

ΘΕΜΑ Α: (Α1) α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ στ) Λ

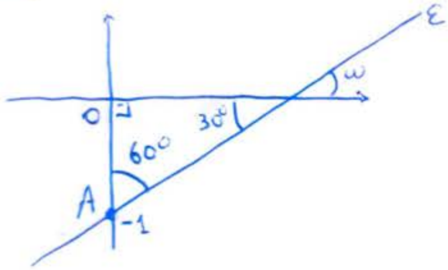
(Α2) $P(x)$ βαθμού το πολύ 2.

$P(x)$ βαθμού 2 $\Leftrightarrow \lambda^3-\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq \pm 1$

- για $\lambda=0$: $P(x)=-3 \rightarrow$ βαθμού 0
- για $\lambda=1$: $P(x)=2x-4 \rightarrow$ βαθμού 1
- για $\lambda=-1$: $P(x)=0 \rightarrow$ δεν ορίζεται βαθμός.

ΘΕΜΑ Β:

(Β1)



$\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$A(0,-1) \in \varepsilon \Rightarrow (\varepsilon): y-y_A = \lambda_\varepsilon \cdot (x-x_A) \Rightarrow$

$(\varepsilon): y+1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x \Leftrightarrow (\varepsilon): \sqrt{3}x-3y-3=0.$

(Β2) α) $\underbrace{\kappa}_{A_1}x+\underbrace{(\kappa-1)}_{B_1}y+4=0 \quad (1)$, $\underbrace{(3\kappa+1)}_{A_2}x\underbrace{-2\kappa}_{B_2}y+6=0 \quad (2)$

- $A_1=0 \Leftrightarrow \kappa=0$
- $B_1=0 \Leftrightarrow \kappa=1$
- $A_2=0 \Leftrightarrow \kappa=-\frac{1}{3}$
- $B_2=0 \Leftrightarrow \kappa=0.$

Και στις δύο περιπτώσεις, οι συντελεστές του x και y δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα για κάποια τιμή του $\kappa \in \mathbb{R} \Rightarrow$ οι (1) και (2) παριστάνουν ευθείες $\forall \kappa \in \mathbb{R}$

β) $(\varepsilon_1): \kappa x+(\kappa-1)y-4=0$

$(\varepsilon_2): (3\kappa+1)x-2\kappa y+6=0$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ πλάγιες ευθείες $\Rightarrow$ ορίζονται οι $\lambda_{\varepsilon_1}, \lambda_{\varepsilon_2}$ και είναι $\neq 0$

$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{\kappa}{\kappa-1}$, $\lambda_{\varepsilon_2} = -\frac{A_2}{B_2} = \frac{3\kappa+1}{2\kappa}$ $(\kappa\neq 0, \kappa \neq 1)$

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_{\varepsilon_1}\cdot\lambda_{\varepsilon_2}=-1 \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\kappa-1}\cdot\frac{3\kappa+1}{2\kappa}=1 \Rightarrow$

$2\kappa-2=3\kappa+1 \Rightarrow \boxed{\kappa=-3}$

αλλιώς

$\vec{\delta_1} = (B_1, -A_1) = (\kappa-1, -\kappa) \parallel \varepsilon_1$

$\vec{\delta_2} = (B_2, -A_2) = (-2\kappa, -3\kappa-1) \parallel \varepsilon_2$

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \vec{\delta_1} \perp \vec{\delta_2} \Leftrightarrow \vec{\delta_1}\cdot\vec{\delta_2}=0 \Leftrightarrow$

$(\kappa-1)\cdot(-2\kappa)+(-\kappa)\cdot(-3\kappa-1)=0 \Leftrightarrow$

$\kappa\cdot(2\kappa-2-3\kappa-1)=0 \Leftrightarrow$

$\kappa(-\kappa-3)=0 \Leftrightarrow \kappa=0$ ή $\boxed{\kappa=-3}$ δεκτό

απορρίπτεται γιατί τότε $(\varepsilon_1): y=4$ και $(\varepsilon_2): x=-6$

γ) Για $\kappa=-3$: $(\varepsilon_1): 3x+4y+4=0$ και $(\varepsilon_2): 4x-3y-3=0$.

$$\begin{cases} 3x+4y+4=0 \\ 4x-3y-3=0 \end{cases} \overset{\cdot 3,\ \cdot 4}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 9x+12y+12=0 \\ 16x-12y-12=0 \end{cases} \overset{+}{\Longrightarrow} 25x=0 \Rightarrow x=0 \text{ και τότε } 4y+4=0 \Rightarrow y=-1$$

σημείο τομής $A(0,-1)$.

δ) Αν $\delta \parallel \varepsilon_1$, τότε $(\delta): 3x+4y+\lambda=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Ζητάμε:

$$d(A,\delta)=1 \Leftrightarrow \frac{|3\cdot 0+4\cdot(-1)+\lambda|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1 \Leftrightarrow \frac{|\lambda-4|}{5}=1 \Leftrightarrow \lambda-4=5 \text{ ή } \lambda-4=-5$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda=9$ ή $\lambda=-1$ και οι αντίστοιχες ευθείες είναι οι

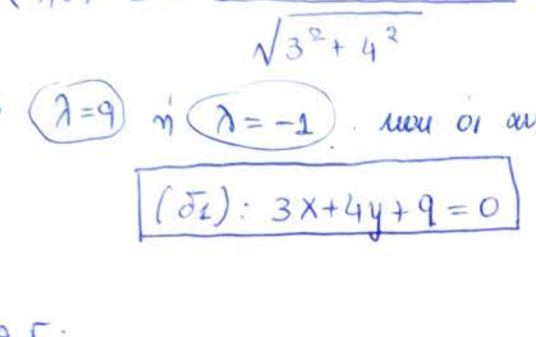
$\boxed{(\delta_1): 3x+4y+9=0}$ και $\boxed{(\delta_2): 3x+4y-1=0}$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>:

(Γ1) α) • $D_g=\mathbb{R}$, άρα $\forall x\in D_g$ ισχύει $-x\in D_g$
• $\forall x\in\mathbb{R}$: $g(-x)=(-x)^2+2=x^2+2=g(x)$
$\Rightarrow g$ άρτια.

β) $f(x)=g(x+1)-3=(x+1)^2+2-3=x^2+2x+1-1 \Rightarrow f(x)=x^2+2x,\ x\in\mathbb{R}$.

γ)



δ) • $g \searrow (-\infty,0]$ και $g \nearrow [0,+\infty)$

• η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x_0=0$, με ελάχιστη τιμή $\min g=g(0)=2$, ενώ δεν παρουσιάζει μέγιστο.

ε) $g(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$, ενώ $-1\leq ημθ\leq 1\ \forall\theta\in\mathbb{R}$
άρα $g(x)=ημθ$ <u>αδύνατη</u>

(Γ2) α) $εφ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

περιορισμός: $συν\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}\neq \lambda\pi+\frac{\pi}{2},\ \lambda\in\mathbb{Z}$

$εφ\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=εφ\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{x=\kappa\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}}$

β) $2ημ^2x-3ημx+1=0 \Leftrightarrow ημx=\frac{3\pm1}{4}$ — $ημx=1=ημ\frac{\pi}{2}$ ή $ημx=\frac{1}{2}=ημ\frac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\ \kappa\in\mathbb{Z}} \\ \text{ή} \\ x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \text{ ή } x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}} \text{ ή } \boxed{x=2\kappa\pi+\frac{5\pi}{6},\ \kappa\in\mathbb{Z}} \end{cases}$$

γ) $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 3x \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 3x \\ \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 5x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή} \\ 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} + 3x \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x = \frac{2\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{10}, \kappa \in \mathbb{Z}} \\ \text{ή} \\ \boxed{x = -2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}} \end{cases}$

αλλιώς: $\eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 3x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sigma\upsilon\nu 3x \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -\frac{2\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

δ) • $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$x = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

• πρέπει $x \in (0, 2\pi)$, άρα:

▫ 1η μορφή λύσεων: $0 < 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < \kappa < 1 - \frac{1}{3} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 0$

άρα $\boxed{x = \frac{2\pi}{3}}$

▫ 2η μορφή λύσεων: $0 < 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \kappa < 1 + \frac{1}{3} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 1$

άρα $x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \rightarrow \boxed{x = \frac{4\pi}{3}}$

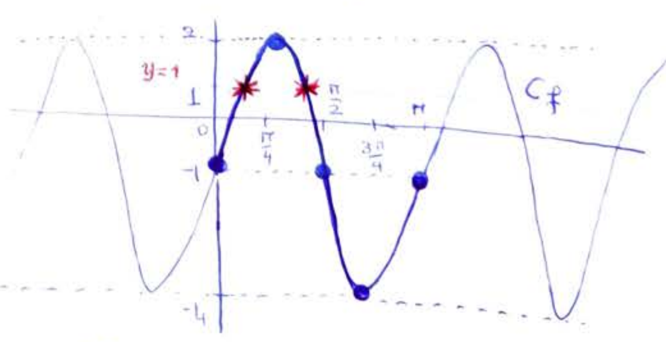
ΘΕΜΑ Δ:

(Δ1) $\left.\begin{array}{l} \bullet\ \eta\mu(\pi + 2x) = -\eta\mu 2x \\ \bullet\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \eta\mu 2x \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = -\eta\mu 2x + 4\eta\mu 2x - 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = 3\eta\mu 2x - 1, x \in \mathbb{R}}$

(Δ2) α) $f(x) = \underbrace{3}_{\alpha} \cdot \eta\mu \underbrace{2}_{\omega} x \underbrace{-1}_{\beta}$ $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$, $\max f = |\alpha| + \beta = 2$, $\min f = -|\alpha| + \beta = -4$

β)

x	0	$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{4}$	$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{3T}{4} = \frac{3\pi}{4}$	$T = \pi$
$f(x)$	-1	2	-1	-4	-1



γ) $f \nearrow \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $f \nearrow \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$, $f \searrow \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

δ) Ακριβώς 2 ρίζες (όσα και τα σημεία τομής των C_f και $\varepsilon: y = 1$ στο $[0, \pi]$)

(Δ3) • $f(x)+1 = 3\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow 3\eta\mu 2x - \cancel{1} + \cancel{1} = 3\sigma\upsilon\nu 2x \Leftrightarrow \eta\mu 2x = \sigma\upsilon\nu 2x$

$\xLeftrightarrow{:\ \sigma\upsilon\nu 2x \neq 0,\ \text{γιατί αν ήταν}} \varepsilon\varphi 2x = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4},\ \kappa \in \mathbb{Z}$

$\sigma\upsilon\nu 2x = 0$, τότε και $\eta\mu 2x = 0$,
άρα $\eta\mu^2 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x = 0$, Άτοπο

$\Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8},\ \kappa \in \mathbb{Z}$.

• Πρέπει $x \in [0,\pi] \Leftrightarrow 0 \le \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \le \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \le \kappa \le 2 - \frac{1}{4} \xRightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 0$ ή $\kappa = 1$

Άρα: $\boxed{x = \frac{\pi}{8}}$ ή $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{8}}$, αντίστοιχα.

(Δ4) $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ζητάμε: $\eta\mu x + 1 < \dfrac{f\left(\frac{x}{2}\right) + 2}{2\eta\mu x} \Leftrightarrow \eta\mu x + 1 < \dfrac{3\eta\mu x - 1 + 2}{2\eta\mu x}$

$\xLeftrightarrow[\forall x \in (0,\frac{\pi}{2})]{\eta\mu x > 0} 2\eta\mu x(\eta\mu x + 1) < 3\eta\mu x + 1 \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x < 3\eta\mu x + 1 \Leftrightarrow$

$2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 < 0 \xLeftrightarrow{\text{πίνακας}}$

y	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$2y^2-y-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

$-\frac{1}{2} < \eta\mu x < 1$ που ισχύει
για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.