

1. ☒ Ζωγράφου: Ι. Επάφου & Χρυσίππου 1 ☎ 210 74 88 030
 II. Ξηρογιάννη 10 ☎ 210 7488180
2. ☒ Χολαργός : Φανερωμένης 13 ☎ 210 65 36 551
3. ☒ Αγία Παρασκευή: Ευεργέτου Γιαβάση, 9,
 Πλατεία Αγ. Παρασκευής ☎210600003



Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- Γ1** Να αποδείξετε ότι στα διαστήματα $A_1 = (0, e]$ και $A_2 = [e, +\infty)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα αντίστοιχα και ακολούθως να αποδείξετε ότι τα αντίστοιχα σύνολα τιμών είναι $f(A_1) = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$ και $f(A_2) = \left(0, \frac{1}{e}\right]$.
- Γ2** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e f(x) dx$.
- Γ3** A) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ εφαπτεται της C_f ,
 B) Αν σημείο M κινείται στην παραπάνω εφαπτομένη, να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης σημείου M από την αρχή των αξόνων κατά την χρονική στιγμή που το M συμπίπτει με το σημείο επαφής εφαπτομένης και συνάρτησης. Δίνεται ότι η τετμημένη του M αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες/δευτερόλεπτο.
- Γ4** A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2e \cdot \ln x - (1 - e^2) \cdot x = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1/e, e)$.
 B) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \left(\frac{1}{e}, e\right) : \frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2 \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}$

Μονάδες : 7 – 6 – 6 – 6

Θέμα Δ

Δίνεται η πραγματική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{e^x - \alpha}{e^x + 1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ και $y = \frac{1}{2}x$ εφαπτομένη της.

- Δ1** A) Να αποδείξετε ότι $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $(e^x + 1)(e^x(1 - x) - 1) = 0$
 B) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.
- Δ2** Να υπολογίσετε την μονοτονία και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- Δ3** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{2e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3} dx$.
- Δ4** A) Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η απόσταση των σημείων $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ να είναι ίση με $(AB) = (\beta - \alpha) \sqrt{(f'(\xi))^2 + 1}$.
 B) Αν σημείο M κινείται πάνω στην εφαπτομένη της C_f με σημείο επαφής $(\xi, f(\xi))$ να αιτιολογήσετε γιατί το εμβαδόν του τριγώνου AMB είναι ανεξάρτητο από την θέση του σημείου M .

Μονάδες : 8 – 8 – 4 – 3+2