ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓ. Γ ΛΥΚΕΙΟΥ 31-1/2026

ΘΕΜΑ Α

$\boxed{A4}$ α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}$

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^6}3x^2 = -\frac{3}{x^2} + \frac{6x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^4} = \frac{-3x^2+6}{x^4}$$

$-3x^2+6=0 \iff x^2=2 \iff x=\pm\sqrt{2}$

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$
		Τ.Ε.				ΤΜ	

- $f(-\sqrt{2}) = \frac{4}{(-\sqrt{2})^3} = \frac{2}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2} =$ Τ.Ε
- $f(\sqrt{2}) = \frac{4}{(\sqrt{2})^3} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} =$ Τ.Μ.

$\boxed{B2}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{3x^2-2}{x^3} \overset{\frac{-2}{0^+}}{=} -\infty$ άρα $\boxed{x=0}$ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = 0$ άρα $\boxed{y=0}$ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΣΤΟ $\pm\infty$

$\boxed{B3}$ $f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{6}{x^4} = \frac{-3x^2+6}{x^4}$

$$f''(x) = \frac{3}{x^4}\cdot 2x - \frac{6}{x^8}4x^3 = \frac{6x}{x^4} - \frac{24x^3}{x^8} = \frac{6x^5-24x^3}{x^8} = \frac{6x^3(x^2-4)}{x^8}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$6x^3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

άρα $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$

$\boxed{B4}$ $I = \int_{-1}^{-2}\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx = \left[3\ln|x|\right]_{-1}^{-2} - 2\int_{-1}^{-2} x^{-3}\,dx =$

$= 3\ln 2 - 3\cancel{\ln 1}^{0} - \cancel{2}\left[\frac{x^{-2}}{\cancel{-2}}\right]_{-1}^{-2} = 3\ln 2 + \left[x^{-2}\right]_{-1}^{-2} = \boxed{3\ln 2 - \frac{3}{4}}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \Leftrightarrow 1=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x+\beta) \overset{*}{\Leftrightarrow} \boxed{1=\beta}$

$* \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-\alpha x-1}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-\alpha}{1} = 1-\alpha \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \end{cases}$$

άρα $1-\alpha=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=1}$

Γ2 (i) Από **Γ1** έχουμε $f'(0)=0$

(ε_1): $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow \boxed{y=1}$

Για $\boxed{x\leq 0}$: $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Για $\boxed{x>0}$: $f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

$f(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = -\frac{1}{2e}+1 \rightarrow (\varepsilon_2): \boxed{y=-\frac{1}{2e}+1}$

(ii)

x	$-\infty$ … 0	0 … $\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ … $+\infty$
e^x-1	$-$		
$2\ln x+1$		$-$ 0	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$ 0	$+$
$f(x)$	↘	↘ ΟΕ	↗

- $\lim\limits_{x\to -\infty}(e^x-x)=0+\infty=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2\ln x+1)=+\infty$
- $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=1-\frac{1}{2e}$

f ΣΥΝΕΧΗΣ κ' ↘ ΣΤΟ $\Delta_1=\left(-\infty,\frac{1}{\sqrt{e}}\right] \rightarrow f(\Delta_1)=\left[1-\frac{1}{2e},+\infty\right)$

f ΣΥΝΕΧΗΣ κ' ↗ ΣΤΟ $\Delta_2=\left[\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right) \rightarrow f(\Delta_2)=\left[1-\frac{1}{2e},+\infty\right)$

άρα $f(\Delta)=\left[1-\frac{1}{2e},+\infty\right)$.

Γ3 $I=\int_0^1 (2-x) f(-x)\,dx \overset{*}{=} \int_0^{-1} (2+u) f(u)(-1)\,du = \int_{-1}^{0} (2+x) f(x)\,dx$

* ΘΕΤΟΥΜΕ $u=-x$.

$du=-dx \Leftrightarrow dx=-du$

$u_1=0 \mid u_2=-1$

$I=\int_{-1}^{0} (x+2)\cdot(e^x-x)\,dx = \int_{-1}^{0}(x+2)e^x\,dx - \int_{-1}^{0}(x^2+2x)\,dx$

$= \left[e^x(x+2)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^x\,dx - \left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-1}^{0} =$

$= 2-(e^{-1}\cdot 1) - (e^0-e^{-1}) - \left(0-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right) =$

$= 2-\cancel{e^{-1}}-\cancel{1}+\cancel{e^{-1}}-\frac{1}{3}+\cancel{1} = \boxed{\frac{5}{3}}$

Γ4 ΑΠΟ ΤΟ **Γ2** ΕΧΟΥΜΕ $f(\Delta_1)=\left[1-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$

$f(\Delta_2)=\left[1-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$

ΓΙΑ ΝΑ ΕΧΕΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΚΡΙΒΩΣ ΜΙΑ ΡΙΖΑ ΠΡΕΠΕΙ

$f(x)=1-\frac{1}{2e} \Leftrightarrow \ln K - K - \cancel{\frac{1}{2e}} + 2 = 1 - \cancel{\frac{1}{2e}}$

$\Leftrightarrow \ln K - K + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \ln K = K - 1$

ΑΠΟ ΒΑΣΙΚΗ ΑΝΙΣΩΣΗ $\boxed{K=1}$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{Δ1}$ $f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

ΟΕ $\rightarrow$ $f(x)\geq f(0)=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\boxed{Δ2}$ (i)

$\boxed{Δ2}$ (ii) ΘΜΤ ΣΤΟ $[\lambda,\lambda+2]$ $\rightarrow$ $\exists x_0\in(\lambda,\lambda+2)$: $F'(x_0)=\dfrac{F(\lambda+2)-F(\lambda)}{2}$

$$\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{F(\lambda+2)-F(\lambda)}{2}\overset{(i)}{\geq}1 \Leftrightarrow F(\lambda+2)-F(\lambda)\geq 2$$

$\boxed{Δ3}$ $2F(2^x)-2F(x+1)=F(2\cdot 2^x)-F(2(x+1))$

$$\Leftrightarrow 2F(2^x)-F(2\cdot 2^x)=2F(x+1)-F(2(x+1))$$

ΘΕΤΟΥΜΕ $g(x)=2F(x)-F(2x)$, $x\geq 0$

$g'(x)=2f(x)-2f(2x)=2(f(x)-f(2x))<0$ αφού:

$\triangleright$ $x<2x \underset{x>0}{\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}} f(x)<f(2x)$

$g\downarrow$ στο $[0,+\infty)$ οπότε $1-1$

$\rightarrow g(2^x)=g(x+1)\overset{1-1}{\Longleftrightarrow} 2^x=x+1 \Leftrightarrow 2^x-x-1=0$

Θεωρώ $h(x)=2^x-x-1$, $x\in[0,+\infty)$

$h(0)=0=h(1)$

$h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=0$

ΘR ΘR

$h'(x_4)=0=h'(x_5)$

ΘR

$h''(\xi)=0$

$h''(\xi)=2^\xi\ln^2\xi=0$

Άτοπο

$\boxed{\Delta 4}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(F(8) - F(10) \right) x^3 + x = F(8) - F(10) + 1 \overset{*}{<} 0$

* Απο το Δ2 (ii) έχουμε:

$$F(10) \geq F(8) + 2 \Leftrightarrow 0 \geq F(8) - F(10) + 2$$

$$\Leftrightarrow -1 \geq F(8) - F(10) + 1$$

$$\Leftrightarrow 0 > -1 > F(8) - F(10) + 1$$

• $K(x) = F(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}$

$K'(x) = f(x) - 1 \geq 0$ άρα $K \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ και $K(1) = 0$

$$\begin{cases} x > 1 \overset{K\uparrow}{\Leftrightarrow} \underline{K(x) > 0} \\ x < 1 \overset{K\uparrow}{\Leftrightarrow} K(x) < 0 \end{cases}$$

	0	1	
	−	0	+

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{(F(8) - F(10))x^3 + x}{F(x) - x} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} -\infty$$

(ii) $I = \int_0^1 |F(x) - x|\, dx = \int_0^1 -(F(x) - x)\, dx$

$= \int_0^1 x\, dx - \int_0^1 F(x)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' F(x)\, dx =$

$= \frac{1}{2} - \left[xF(x)\right]_0^1 + \int_0^1 x f(x)\, dx = \frac{1}{2} - F(1) + \frac{1}{2} e^{x^2}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}.$