1.✉Ζωγράφου:Ι.Χρυσίππου1,☎210 7488030 &II.Ξηρογιάννη 10 ,☎210 7488180
2.✉Χολαργός:Φανερωμένης13,☎210 6536551
3.✉ΑγίαΠαρασκευή:Ευεργέτου Γιαβάση9,πλατείαΑγ.Παρασκευής,☎2106000031

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

31/1/2026

Θέμα Α

Α1. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Α2. Να διατυπώσετε το Θ.Μ.Τ. και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Α3. Να διατυπώσετε τον κανόνα De l′ Hospital για απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)**.

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

γ) Αν ισχύει $f'(x) > 0$ και $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε οι γραφικές παραστάσεις των f, g θα έχουν πάντα ένα κοινό σημείο.

δ) Αν f, g, συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

ε) Αν f συνεχής στο Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$$

Μονάδες : 7 – 4 – 4 – 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2-2}{x^3}$, $x \neq 0$

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Β2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f.

Β3. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}^*$ η γραφική παράσταση της f'' βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^{-2} f(x)dx$.

Μονάδες : 7 – 6 – 7 – 5

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - \alpha \cdot x, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot \ln x + \beta, & x > 0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

Γ2. (i) Να βρείτε τις οριζόντιες εφαπτομένες της συνάρτηση f .

(ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών $[1 - \frac{1}{2e}, +\infty)$.

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 (2-x) \cdot f(-x)dx$.

Γ4. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in (0,+\infty)$ ώστε η εξίσωση $f(x) = \ln\kappa - \kappa - \frac{1}{2e} + 2$ να έχει ακριβώς μια ρίζα.

Μονάδες : 6 – 9 – 5 – 5

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε μια παράγουσα F,της f στο $\mathbb{R}$ με $F(1) = 1$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ2. (i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Να αποδείξετε ότι $F(\lambda + 2) \geq F(\lambda) + 2$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση :

$$2 \cdot \left(F(2^x) - F(x+1)\right) = F(2^{x+1}) - F\left(2 \cdot (x+1)\right), \qquad x \geq 0$$

έχει ακριβώς δυο λύσεις τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Δ4. (i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{(F(8)-F(10)) \cdot x^3 + x}{F(x) - x} = -\infty$.

(ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 |F(x) - x| dx$.

Μονάδες : 4 – 6(2-4) – 7 – 8(4-4)