## ΘΕΜΑ 1ο

**Α1.** Σχολικό σελ 175

**Α2** (Α) i) Σ , ii) Λ , iii) Σ , iv) Σ

(Β) i) Σ , ii) Λ , iii) Λ , iv) Σ

**Α3** $1 \to B$ , $2 \to A$ | $3 \to A$ , $4 \to B$

**Α4**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | -7 | 0 | 6 | -4 |
| /// | -8 | 60 | -240 | |
| 2 | -15 | 60 | -234 | |

$$2x^3-7x^2+6=(x+4)(2x^2-15x+60)-234$$

## ΘΕΜΑ 2ο

**Β1**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | -5 | -15 | 0 | 4 | -1 |
| /// | -6 | +11 | 4 | -4 | |
| 6 | -11 | -4 | 4 | 0 | |

$$6x^4-5x^3-15x^2+4=0 \Leftrightarrow (x+1)(6x^3-11x^2-4x+4)=0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | -11 | -4 | 4 | 2 |
| /// | 12 | 2 | -4 | |
| 6 | 1 | -2 | 0 | |

$$(x+1)(x-2)(6x^2+x-2)=0$$

$x+1=0$ ή $x-2=0$ ή $6x^2+x-2=0$

$x=-1$ ή $x=2$

$\Delta=1^2-4\cdot 6\cdot(-2)$

$\Delta=49$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm 7}{12} \begin{cases} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

**Β2)**

i) $x^3-5x^2-8x+12<0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -5 | -8 | 12 | 1 |
| /// | 1 | -4 | -12 | |
| 1 | -4 | -12 | 0 | |

$(x-1)(x^2-4x-12)<0$

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $x^2-4x-12=0$

$\Delta=(-4)^2-4\cdot 1(-12)=16+48=64>0$

$x_{1,2}=\frac{4\pm 8}{2}$ ↗ $x_1=6$, ↘ $x_2=-2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $1$ | | $6$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $x^2-4x-12$ | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| γινόμενο | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$\boxed{x\in(-\infty,-2)\cup(1,6)}$

ii) $\frac{-x^4+x^3-x^2+3x+6}{x-1}\geq 0$, $x\neq 1 \Leftrightarrow$

$(-x^4+x^3-x^2+3x+6)(x-1)\geq 0$, $x\neq 1$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | 1 | -1 | 3 | 6 | 2 |
| /// | -2 | -2 | -6 | -6 | |
| -1 | -1 | -3 | -3 | 0 | |

$(x-2)(-x^3-x^2-3x-3)(x-1)\geq 0$, $x\neq 1$

$(x-2)\cdot\left[-x^2(x+1)-3(x+1)\right]\cdot(x-1)\geq 0$, $x\neq 1 \Leftrightarrow$

$(x-2)\cdot(x+1)(-x^2-3)\cdot(x-1)\geq 0$

↓ 2 ↓ -1 ↓ δεν έχει ρίζες ↓ 1

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $-x^2-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| γινόμ. | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\boxed{x \in (-\infty, -1] \cup (1, 2]}$

iii) • $4-2^x \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \leq 2^2 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x \leq 2$

• $e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} x \geq 0$

• $x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=4$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4-2^x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $e^x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-4x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| γινόμ. | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\boxed{x \in (2, 4)}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $f(0)=8 \Leftrightarrow \boxed{\gamma=8}$

$f(1)=0 \Leftrightarrow 1+\alpha+\beta+8=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-9$

$f(-2)=24 \Leftrightarrow$

$\cancel{-8}+4\alpha-2\beta+\cancel{8}=24 \Leftrightarrow$

$4\alpha-2\beta=24 \Leftrightarrow 2\alpha-\beta=12$

Οπότε: $\begin{cases} \alpha+\beta=-9 \\ 2\alpha-\beta=12 \end{cases}$

$(+)\quad 3\alpha=3$

$\boxed{\alpha=1}$ και $1+\beta=-9 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-10}$

Γ2 α) $f(x)=x^3+x^2-10x+8$, $f(1)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-10x+8=0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -10 | 8 | 1 |
| /// | 1 | 2 | -8 | |
| 1 | 2 | -8 | 0 | |

$(x-1)(x^2+2x-8)=0$

$x-1=0$ ή $x^2+2x-8=0$

$\boxed{x=1}$ ή $\boxed{x=-4}$ ή $\boxed{x=2}$

β) $f(x)<0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x-8)<0$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x^2+2x-8$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$\boxed{x\in(-\infty,-4)\cup(1,2)}$

Γ3) $\dfrac{f(x)}{x-1}\leq\dfrac{8}{x-1} \Leftrightarrow$ πρέπει $x-1\neq0$
$x\neq1$

$\dfrac{f(x)}{x-1}-\dfrac{8}{x-1}\leq0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(x)-8}{x-1}\leq0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3+x^2-10x+\cancel{8}-\cancel{8}}{x-1}\leq0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x^2+x-10)}{x-1}\leq0 \Leftrightarrow$

$x(x^2+x-10)(x-1)\leq0$ που $x\neq1$

$\downarrow$ 0, $\downarrow$, $\downarrow$ 1

$\Delta=1-4\cdot1\cdot(-10)=41>0$

$x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{2}$ → $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-1-\sqrt{41}}{2}$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{-1+\sqrt{41}}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x^2+x-10$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| γινόμενο | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\nparallel$ | $-$ | $0$ | $+$ |

$x \in \left[\frac{-1-\sqrt{41}}{2}, 0\right] \cup \left(1, \frac{-1+\sqrt{41}}{2}\right]$

ΘΕΜΑ 4ο:

Δ1/ Για την f πρέπει:

$e^{2x} - 5e^x + 6 > 0$ θέτουμε $e^x = \omega$ τότε:

$\omega^2 - 5\omega + 6 > 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$, $\omega_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $\nearrow \omega_1 = 3$, $\searrow \omega_2 = 2$

| $\omega$ | $-\infty$ | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega^2-5\omega+6$ | + | 0 | − | 0 | + |

$\omega < 2$ ή $\omega > 3 \Leftrightarrow$

$e^x < 2$ ή $e^x > 3 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow}$

$\ln e^x < \ln 2$ ή $\ln e^x > \ln 3 \Leftrightarrow$

$x < \ln 2$ ή $x > \ln 3$

$A_f = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 3, +\infty)$

Για την g: πρέπει:

$-e^x + 2 > 0 \Leftrightarrow e^x < 2 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x < \ln 2 \Leftrightarrow$

$x < \ln 2$

$A_g = (-\infty, \ln 2)$

Δ2/ Για $y = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(-e^x + 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\ln(-e^x + 2) = \ln 1 \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$-e^x + 2 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$x = 0 \in A_g$ δεκτή

Τέμνει τον $x'x$ στο $O(0,0)$

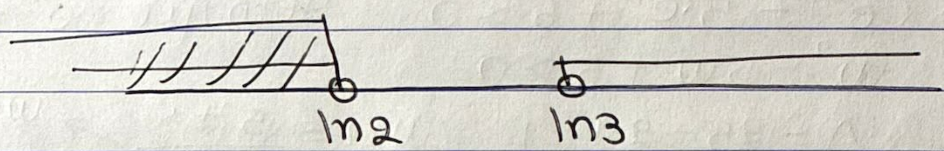
Για $x = 0 \in A_g$: $g(0) = \ln(-e^0 + 2) = \ln 1 = 0$

Τέμνει τον $y'y$ στο $O(0,0)$

**Δ3|** $f(x) \leq g(x) \quad (1)$

πρέπει: $x \in A_f$ και $x \in A_g \Leftrightarrow$

$x \in (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 3, +\infty)$ και $x \in (-\infty, \ln 2)$



άρα $\boxed{x < \ln 2}$

$(1) \Leftrightarrow \ln(e^{2x} - 5e^x + 6) \leq \ln(-e^x + 2) \overset{\ln\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$e^{2x} - 5e^x + 6 \leq -e^x + 2 \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 4e^x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow$

$(e^x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$(e^x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$\ln e^x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$ Απορρίπτεται

Άρα δεν υπάρχουν διαστήματα όπου η $C_f$ δεν είναι πάνω από την $C_g$

**Δ4|** $e^{f(x)} \geq e^{g(x)} + 2e^x - 5 \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 5e^x + 6 \geq -e^x + 2 + 2e^x - 5 \Leftrightarrow$

$e^{2x} - 6e^x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(e^x - 3)^2 \geq 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$