ΣΥΝΟΠΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

14/3/26

ΘΕΜΑ Α

Α4) 1) Λ 2) Σ 3) Λ 4) Σ 5) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1) $f'(x) = \dfrac{-ημx\, ημx - (1+συνx)συνx}{ημ^2x} = \dfrac{-ημ^2x - συνx - συν^2x}{ημ^2x} = \dfrac{-1-συνx}{ημ^2x} \le 0$

άρα $f \searrow$ στο $(0,π)$ και $f \searrow$ στο $(π,2π)$

Β2) $f''(x) = \dfrac{ημx \cdot ημ^2x + (1+συνx)2ημx\, συνx}{ημ^4x} = \dfrac{ημx(ημ^2x + 2συνx + 2συν^2x)}{ημ^4x} =$

$\dfrac{ημx(1-συν^2x+2συνx+2συν^2x)}{ημ^4x} = \dfrac{ημx(συν^2x+2συνx+1)}{ημ^4x} = \dfrac{ημx(συνx+1)^2}{ημ^4x}$

$f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow ημx \ge 0 \Leftrightarrow x \in (0,π)$

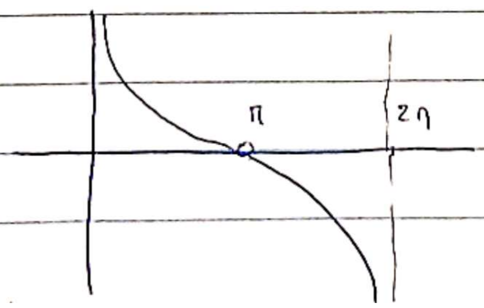
	0		π		π
f''		+		−	
f		$\smile$		$\frown$	

Β3) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1+συνx}{ημx} = \lim\limits_{x\to0^+} (1+συνx)\dfrac{1}{ημx} \overset{2(+\infty)}{=\!=} +\infty$ $x=0$ κατακόρυφη

$\lim\limits_{x\to π} \dfrac{1+συνx}{ημx} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\toπ} \dfrac{-ημx}{συνx} = 0$

$\lim\limits_{x\to2π} f(x) = \lim\limits_{x\to2π^-} \dfrac{1+συνx}{ημx} \overset{2(-\infty)}{=} -\infty$ $x=2π$ κατακόρυφη

Β4)



ΘΕΜΑ Γ

Γ1) f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = \dfrac{1}{1+0} = 1$ άρα η $y=1$ οριζόντια στο $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$ άρα η $y=0$ οριζόντια στο $+\infty$

Γ2) $f'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \longrightarrow \{ f \searrow \}$

$$f''(x) = -\frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x(1+e^x)2e^x}{(1+e^x)^4} = -\frac{e^x(1+e^x)(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^4} = -\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

		0	
f''	$-$		$+$
f	$\frown$		$\smile$

Σ.Κ $f(0)=\frac{1}{2}$

Γ3) $h(x) = (x-2)\left(\alpha f'(\alpha) - f(2\alpha) + f(\alpha)\right) + (x-1)(2\sigma\upsilon\nu x + x - 3)$ στο $[1,2]$

h συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών

$h(1) = -(\alpha f'(\alpha) - f(2\alpha) + f(\alpha)) > 0$

$h(2) = 2\sigma\upsilon\nu 2 - 1 < 0$ γιατί $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ κ' $\sigma\upsilon\nu x < 0$ στο $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$[\alpha, 2\alpha] \xrightarrow{\Theta MT} f'(\xi) = \dfrac{f(2\alpha) - f(\alpha)}{\alpha}$

$\alpha < \xi \underset{\alpha>0}{\overset{f'\nearrow}{\Longleftrightarrow}} f'(\alpha) < f'(\xi) \overset{\alpha}{\Longleftrightarrow} f'(\alpha) < \dfrac{f(2\alpha) - f(\alpha)}{\alpha} \Longleftrightarrow \alpha f'(\alpha) < f(2\alpha) - f(\alpha)$

$\Longleftrightarrow \alpha f'(\alpha) - f(2\alpha) + f(\alpha) < 0 \Longleftrightarrow h(1) > 0$

κ' εφαρμόζουμε Θ. Bolzano.

Γ4) $E = \displaystyle\int_0^\kappa |f(x)|\,dx = \int_0^\kappa \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int_0^\kappa \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x}\,dx = \int_0^\kappa \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right)dx =$

$\left[x - \ln(1+e^x)\right]_0^\kappa = \kappa - \ln(1+e^\kappa) + \ln 2 = \ln e^\kappa - \ln(1+e^\kappa) + \ln 2 =$

$\ln\left(\dfrac{e^\kappa}{1+e^\kappa}\right) + \ln 2 = \ln\left(\dfrac{2e^\kappa}{1+e^\kappa}\right)$ τ.μ

Γ5) Η εφαπτομένη της C_f στο 0:

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

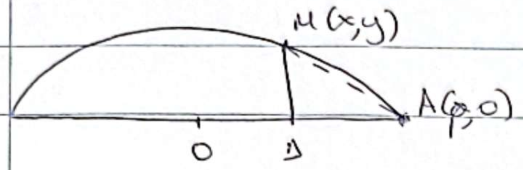
$f \cup$ στο $[0,+\infty)$ άρα $\left.\begin{array}{l} f(x) \geq -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \\ ημx \geq 0 \text{ στο } [0, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right\} \Rightarrow$

$f(x)ημx \geq \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)ημx$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει $\forall x$

$\int_0^{\pi/2} f(x)ημx\,dx > \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)ημx = \int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)(-συνx)'dx =$

$\left[\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)συνx\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{4}συνx\,dx = \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{4}ημx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1) $(AMB) = \frac{(AΔ)\cdot(MΔ)}{2} = \frac{(ρ-x)\sqrt{ρ^2-x^2}}{2}$ Πρέπει $-ρ<x<ρ$ για να έχουμε τρίγωνο.

άρα $f(x) = \frac{1}{2}(ρ-x)\sqrt{ρ^2-x^2}$ $x \in (-ρ, ρ)$

Δ2) $f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{ρ^2-x^2} + (ρ-x)\frac{-2x}{2\sqrt{ρ^2-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{ρ^2-x^2} - \frac{(ρ-x)x}{\sqrt{ρ^2-x^2}}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{ρ^2-x^2+ρx-x^2}{\sqrt{ρ^2-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{-2x^2+ρx+ρ^2}{\sqrt{ρ^2-x^2}}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2x^2-ρx-ρ^2}{\sqrt{ρ^2-x^2}}$

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2-ρx-ρ^2 \geq 0$ $Δ = ρ^2+8ρ^2 = 9ρ^2$, $x_{1,2} = \frac{ρ\pm 3ρ}{4}$ $\to ρ$, $\to -\frac{ρ}{2}$

x	$-ρ$		$-ρ/2$		$ρ$
f'		+		−	
f		↗		↘	

f_{max} για $x = -\frac{ρ}{2}$

$f\left(-\frac{ρ}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(ρ+\frac{ρ}{2}\right)\sqrt{ρ^2-\frac{ρ^2}{4}} = \frac{1}{2}\,\frac{3ρ}{2}\,\frac{\sqrt{3}ρ}{2} = \frac{3ρ^2\sqrt{3}}{8}$

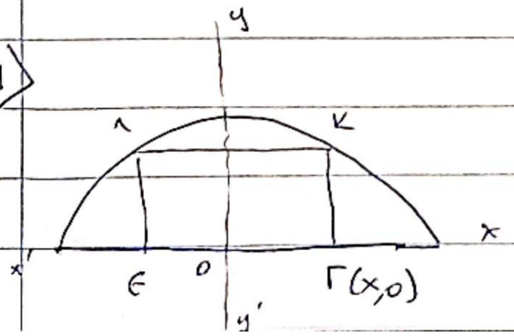
Δ3) $I = \int_{-ρ}^{ρ} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-ρ}^{ρ}(ρ-x)\sqrt{ρ^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-ρ}^{ρ} ρ\sqrt{ρ^2-x^2}\,dx - \int_{-ρ}^{ρ} x\sqrt{ρ^2-x^2}\,dx\right]$

· $ρ\int_{-ρ}^{ρ}\sqrt{ρ^2-x^2}\,dx$ είναι το εμβαδόν του ημικυκλίου άρα $ρ\,\frac{πρ^2}{2} = \frac{πρ^3}{2}$

· $I_1 = \int_{-ρ}^{ρ} x\sqrt{ρ^2-x^2}\,dx$ $\underset{\substack{dx=-du \\ x=-ρ:\ u=ρ \\ x=ρ:\ u=-ρ}}{\overset{x=-u}{=}}$ $\int_{ρ}^{-ρ} -u\sqrt{ρ^2-u^2}\,(-du) = -\int_{-ρ}^{ρ} u\sqrt{ρ^2-u^2}\,du \Leftrightarrow$

$I_1 = -I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0$ άρα $I = \frac{1}{2}\,\frac{πρ^3}{2} = \frac{πρ^3}{4}$

Δ4)



Πρέπει $(ΚΓ) = ΓΕ \Leftrightarrow \sqrt{ρ^2-x^2} = 2x \Leftrightarrow$
$4x^2 = ρ^2-x^2 \Leftrightarrow 5x^2 = ρ^2 \Leftrightarrow x = \frac{ρ}{\sqrt{5}} = \frac{ρ\sqrt{5}}{5}$
ή Bolzano στην $g(x) = \sqrt{ρ^2-x^2} - 2x$ στο $[0, ρ]$