ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
14/03/2026

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Α2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Fermat.

Α3. Να δώσετε τον ορισμό του σημείου καμπής

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.
2. Ισχύει $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln \frac{1}{t} dt$.
3. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των x.
4. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) < 0$.
5. Αν $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3(x+1)$, τότε $f'(\pi) = 3\pi\sigma\upsilon\nu(\pi^2 + 1)$.

(Μονάδες 3 – 8(3+5) – 4 – 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$, $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Β1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(Μονάδες 7)**

Β2. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(Μονάδες 8)**

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης **(Μονάδες 5)**

Β4. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}$.

Γ1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν οι ασύμπτωτες. **(Μονάδες 4)**

Γ2. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(Μονάδες 5)**

Γ3.Για $\alpha>0$, να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\alpha f'(a)-f(2a)+f(a)}{x-1}+\dfrac{2\sigma\upsilon\nu x+x-3}{x-2}=0$, έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$. **(Μονάδες 6)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τους άξονες x′x και y΄y και την ευθεία $x=k,\ k>0$ είναι $E=\ln\left(\dfrac{2e^{k}}{1+e^{k}}\right)$. **(Μονάδες 5)**

Γ. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot \eta\mu x dx>\frac{1}{4}$. **(Μονάδες 5)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ημικύκλιο $y=\sqrt{\rho^2-x^2}$, κέντρου $O(0,\ 0)$ και ακτίνας ρ. Έστω $A(\rho,0)$ και σημείο $M(x,y)$,, το οποίο κινείται πάνω στο ημικύκλιο.

Από το σημείο Μ, φέρνουμε κάθετη στον άξονα x'x στο $\Delta(x,0)$. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΜΔ.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΔ δίνεται από τη συνάρτηση

$f(x)=\dfrac{(\rho-x)\sqrt{\rho^2-x^2}}{2}$ της οποίας να βρείτε το πεδίο ορισμού.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη τιμή.

Δ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\rho}^{\rho} f(x)dx$

Δ4. Θεωρούμε τα σημεία Κ και Λ που ανήκουν στο ημικύκλιο $y=\sqrt{\rho^2-x^2}$ και τα σημεία Γ και Ε που ανήκουν στον άξονα x'x, με $\Gamma(x,0),\ x>0$ και σχηματίζουν ορθογώνιο ΛΚΓΕ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x>0$ για το οποίο το ορθογώνιο ΛΚΓΕ είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 5 – 8(5+3) – 6 – 6)