ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 29/03/2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Σχολικό βιβλίο σελ. 126

Α2 α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Λ

Α3 α) ii β) iii γ) iii δ) i ε) iv

ΘΕΜΑ Β

Β1 α) Είναι $2x^2-3x-2 = 2(x+\frac{1}{2})(x-2)$
$= (2x+1)(x-2)$

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2(-2) = 25$

$x_1 = -\frac{1}{2}$

$x_2 = 2$

β) Πρέπει: $2x^2-3x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$ και $x \neq 2$.

Άρα η Κ ορίζεται στο σύνολο:

$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 2) \cup (2, +\infty)$

γ) Είναι $k = \dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$

$= \dfrac{(x-2)^2}{(2x+1)(x-2)}$

$= \dfrac{x-2}{2x+1}$

B2 α) $\left.\begin{aligned} a_{10} &= a_1+9\omega = 19+9\omega \\ a_6 &= a_1+5\omega = 19+5\omega \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(-)}$

$a_{10}-a_6 = 19-19+9\omega-5\omega$

$\Rightarrow 24 = 4\omega$

$\Rightarrow \omega = 6$

β) $a_{20} = a_1+19\omega = 19+19\cdot 6 = 133$

$\boxed{\text{ΘΕΜΑ Γ}}$

Γ1 α) $5x^2 \geq 20x \Leftrightarrow 5x^2-20x \geq 0$

$\Leftrightarrow 5x(x-4) \geq 0$ (ρίζες: 0 και 4)

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$5x^2-20x$		+	0	−	0	+	

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

β) $2x^2-3x-5<0$

$\Delta = (-3)^2-4\cdot 2(-5) = 49$

$x_1 = \frac{5}{2}$

$x_2 = -1$

x	$-\infty$		-1		$5/2$		$+\infty$
$2x^2-3x-5$		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (-1, \frac{5}{2})$

γ) $2x^2-8 \geq 0 \iff 2(x^2-4) \geq 0$

$\iff 2(x-2)(x+2) \geq 0$ (ρίζες: -2 και 2)

$\iff x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

x	$-\infty$		-2		2	
$2x^2-8$		$+$	0	$-$	0	$+$

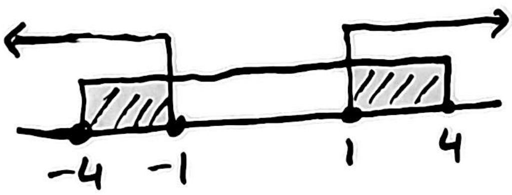
δ) $-9x^2+6x-1<0 \iff -(3x-1)^2<0$ (ρίζα: $\frac{1}{3}$)

$\iff x \in (-\infty,\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3},+\infty)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x^2+6x-1$		$-$	0	$-$	

Γ2 α) $1 \leq |x| \leq 4 \iff |x| \geq 1$ και $|x| \leq 4$

$\iff (x \geq 1$ ή $x \leq -1)$ και $(-4 \leq x \leq 4)$



$\iff x \in [-4,-1] \cup [1,4]$

$(2-3x)^2-9 \geq 7(x-1)^2 \iff 4-12x+9x^2-9 \geq 7x^2-14x+7$

$\iff 2x^2+2x-12 \geq 0$

$\iff x^2+x-6 \geq 0$

$\iff x \in (-\infty,-3] \cup [2,+\infty)$

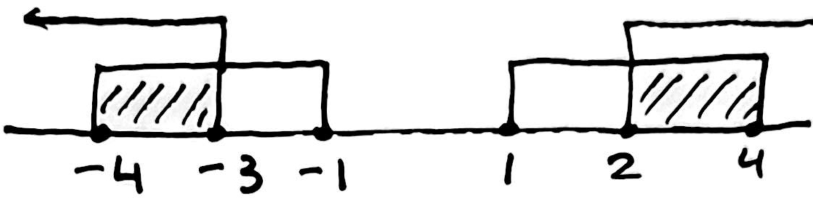
$\Delta = 1^2-4\cdot1(-6)=25$

$x_1=-3$

$x_2=2$

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ



Άρα $1 \leq |x| \leq 4$ και $(2-3x)^2 - 9 \geq 7(x-1)^2$

$\iff x \in [-4,-3] \cup [2,4]$

β) α και β κοινές και θετικές λύσεις.

Άρα: $\alpha \in [2,4]$ και $\beta \in [2,4]$

$2 \leq \alpha \leq 4 \Rightarrow 4 \leq 2\alpha \leq 8$ (1)

$2 \leq \beta \leq 4 \Rightarrow 6 \leq 3\beta \leq 12$ (2)

(1)+(2): $10 \leq 2\alpha + 3\beta \leq 20$

$\Rightarrow 2 \leq \dfrac{2\alpha+3\beta}{5} \leq 4$

$\Rightarrow \dfrac{2\alpha+3\beta}{5} \in [2,4]$

Άρα ο αριθμός $\dfrac{2\alpha+3\beta}{5}$ είναι κοινή λύση

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Για $\lambda = 1$

$$f(x) = x^2 - 2x = x(x-2) \quad (\text{ρίζες}: 0 \text{ και } 2)$$

x		0		2	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Άρα $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 2)$

Είναι $\frac{\pi+1}{2} > 2$. Πράγματι,

$$\frac{\pi+1}{2} > 2 \Leftrightarrow \pi + 1 > 4$$
$$\Leftrightarrow \pi > 3 \text{ ισχύει.}$$

Από πίνακα προσήμου παρατηρούμε ότι

$f\left(\frac{\pi+1}{2}\right) > 0$

x		0		2	$\frac{\pi+1}{2}$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Δ2 $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0$ και $\underbrace{\lambda > 0}_{\text{ισχύει}}$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda(2\lambda - 2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 - 8\lambda^2 + 8\lambda \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -4\lambda^2 + 8\lambda \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -4\lambda(\lambda - 2) \leq 0$$

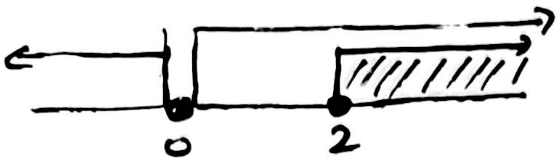
(ρίζες: 0 και 2)

λ		0		2	
$-4\lambda^2 + 8\lambda$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$$

Από υπόθεση όμως: $\lambda > 0$

ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ



Άρα $\lambda \in [2, +\infty)$

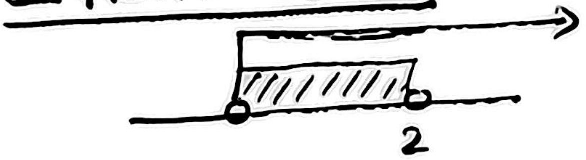
Δ3| Το $f(x)$ έχει άνισες πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow -4\lambda^2 + 8\lambda > 0$

Από Δ2 (πίνακας προσήμων) έχουμε:

$$\lambda \in (0, 2)$$

Από υπόθεση όμως: $\lambda > 0$

ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ



Άρα $\lambda \in (0, 2)$

Δ4| Το $f(x)$ έχει άνισες πραγματικές ρίζες $\overset{\Delta 3}{\Longleftrightarrow} \lambda \in (0, 2)$

α) i) $x_1^2 + x_2^2 < 20 \Leftrightarrow S^2 - 2P < 20$

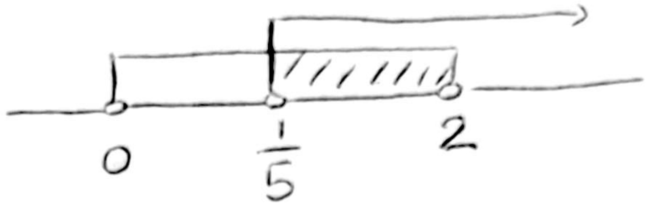
$$\Leftrightarrow \left(\frac{2\lambda}{\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{2\lambda - 2}{\lambda}\right) < 20$$

$$\Leftrightarrow 4 - \frac{4\lambda - 4}{\lambda} < 20$$

$$\overset{\lambda > 0}{\Longleftrightarrow} 4\lambda - 4\lambda + 4 < 20\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{5}$$

ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ



Άρα $\lambda \in (\frac{1}{5}, 2)$

ii) Ισχύει $0 < x_1 < x_2 < 2$ αν και μόνο αν οι αριθμοί 0 και 2 είναι εκτός των ριζών. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $f(0) > 0$ και $f(2) > 0$

x	0		x_1		x_2		2
$f(x)$		+		−		+	

$\lambda > 0$

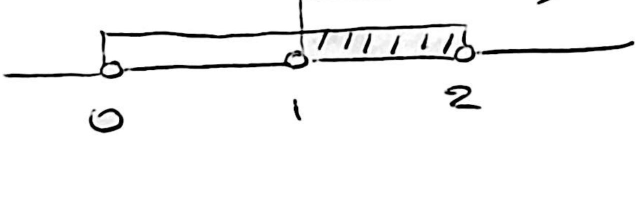
Άρα: $f(0) > 0$ και $f(2) > 0$

$\Longleftrightarrow 2\lambda - 2 > 0$ και $4\lambda - 4\lambda + 2\lambda - 2 > 0$

$\Longleftrightarrow 2\lambda - 2 > 0$

$\Longleftrightarrow \lambda > 1.$

ΣΥΝΑΛΗΘΕΥΣΗ



Άρα $\lambda \in (1, 2)$.

β) Προφανώς, $f(x_1)=0$ αφού x_1 ρίζα του τριωνύμου $f(x)$

x		x_1	$\frac{x_1+x_2}{2}$	x_2		x_2+1
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Επειδή $x_2+1>x_2$ θα ισχύει: $f(x_2+1)>0$

Επιπλέον, $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$

Πράγματι, $x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2$

$\Leftrightarrow 2x_1<x_1+x_2<2x_2$

$\Leftrightarrow 2x_1<x_1+x_2$ και $x_1+x_2<2x_2$

$\Leftrightarrow \underbrace{x_1<x_2}_{\text{ισχύει}}$ και $\underbrace{x_1<x_2}_{\text{ισχύα}}$.

Άρα $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<0$.

Αύξουσα σειρά: $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<f(x_1)<f(x_2+1)$