Λύσεις διαγωνίσματος 5/4/2026

ΘΕΜΑ Α:

(Α4) α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β:

(Β1) $A = D_f = [-4,-3)\cup(-3,4)$ και $f(A) = (-3,3)$

(Β2) Πρέπει $x\in A$ και $f(x)\le 0 \Rightarrow B = D_g = [-1,1)\cup(1,3]$

(Β3) i) $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = \lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 2 \neq 3 = \lim\limits_{x\to-3^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to -3} f(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

iv) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -2 \neq -3 = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to1} f(x)$

v) $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = -1 \neq 2 = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow \nexists\lim\limits_{x\to3} f(x)$

vi) $\lim\limits_{x\to4} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = 3$.

(Β4) i) $f(x)=1 \longrightarrow$ 3 ρίζες

ii) $f(x)(f(x)-5) = -6 \Leftrightarrow f^2(x) - 5f(x)+6 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{f(x)=2}_{1\text{ ρίζα}}$ ή $\underbrace{f(x)=3}_{\text{αδύνατη } (3\notin f(A))} \longrightarrow$ 1 ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ:

(Γ1) • $f(-2)=0 \Leftrightarrow -\cancel{8}+4\alpha+\cancel{8}+\beta=0 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-4\alpha}$ (1)

• $f(1)=3 \Leftrightarrow 1+\alpha-4+\beta=3 \Leftrightarrow \boxed{\beta=6-\alpha}$ (2)

Λόγω των (1),(2): $-4\alpha = 6-\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-2}$ και τότε $\boxed{\beta=8}$

Συνεπώς: $f(x) = x^3-2x^2-4x+8,\ x\in\mathbb{R}$.

(Γ2) Αρχικά: $f(x) = x^2(x-2)-4(x-2) = (x^2-4)(x-2) = (x-2)^2(x+2),\ x\in\mathbb{R}$.

• $L_1 = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{(x-2)^{\cancel{2}}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}} = -4$.

• $L_2 = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\cancel{x^3}-2x^2-4x+\cancel{8}-\cancel{x^3}-\cancel{8}|}{2(\sqrt{x+4}+2)} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cancel{2}|x^2+2x|(\sqrt{x+4}+2)}{\cancel{2}(x+\cancel{4}-\cancel{4})} = \lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{|x^2+2x|}{x}\cdot(\sqrt{x+4}+2)\right)$

που δεν υπάρχει, διότι:

$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{|x^2+2x|}{x}(\sqrt{x+4}+2)\right) \overset{\text{πίνακας}}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{-\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}(\sqrt{x+4}+2)\right) = -8$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		+	0	−	0	+	

ενώ $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{|x^2+2x|}{x}(\sqrt{x+4}+2)\right) \overset{\text{πίνακας}}{=\!=\!=} \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}}(\sqrt{x+4}+2)\right) = 8$

(Γ3) Πρέπει $f(x)>0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+2)>0 \Leftrightarrow x\neq 2$ και $x>-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

οπότε: C_f πάνω από $x'x$ στο $(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(Γ4) • για την φ: πρέπει $f(x)>0 \xLeftrightarrow{\Gamma 3} x\neq 2$ και $x>-2$, δηλαδή $D_\varphi=(-2,2)\cup(2,+\infty)$

• για την ψ: πρέπει $x>2$ και $x>-2$, δηλαδή $D_\psi=(2,+\infty)$.

Είναι $D_\varphi\neq D_\psi$, άρα $\varphi\neq\psi$. Όμως, αν $A=D_\varphi\cap D_\psi=(2,+\infty)$, τότε: $\forall x\in A$:

$$\varphi(x)=\ln\left((x-2)^2(x+2)\right)=\ln\left(|x-2|^2\right)+\ln(x+2)=2\ln|x-2|+\ln(x+2)\underset{\text{στο } A}{\overset{x>2}{=}}2\ln(x-2)+\ln(x+2)=\psi(x)$$

Συνεπώς, $\varphi=\psi$ στο $A=(2,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ:

(Δ1) Έστω $h(x)=\dfrac{f(x)-4x}{x^2-1}$ για x κοντά στο 1. Τότε $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=4$ και ισχύει:

$$\boxed{f(x)=(x^2-1)h(x)+4x,\ \text{για } x \text{ κοντά στο } 1 \ (*)}$$

i) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 1}\left((x^2-1)h(x)+4x\right)=(1^2-1)\cdot 4+4\cdot 1=4.$

ii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-4}{x-1}\overset{*}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)h(x)+4x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)h(x)+4(x-1)}{x-1}=(1+1)\cdot 4+4=12.$

(Δ2) Αρχικά, είναι $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)-2)=4-2=2>0$, άρα $f(x)-2>0$ κοντά στο 1. Οπότε:

$$L=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)(f(x)-2)-8}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)-2f(x)-8}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-4}{x-1}\cdot\frac{f(x)+2}{x+3}\right)\overset{\Delta 1}{=}12\cdot\frac{4+2}{1+3}=18.$$

(Δ3) $$\lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{f^2(x)+20}-6}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f^2(x)+20-36}{(x-1)\left(\sqrt{f^2(x)+20}+6\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{f(x)-4}{x-1}\cdot\frac{f(x)+4}{\sqrt{f^2(x)+20}+6}\right)\overset{\Delta 1}{=}12\cdot\frac{4+4}{6+6}=8.$$

(Δ4) Αφού $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=8$ και $\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2\alpha^2x^2-5\alpha x+10)=2\alpha^2-5\alpha+10$, για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-}g(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}g(x)\Leftrightarrow$

$8=2\alpha^2-5\alpha+10\Leftrightarrow 2\alpha^2-5\alpha+2=0\xLeftrightarrow{\Delta=9}\alpha=\dfrac{5\pm 3}{4}$

- $\boxed{\alpha=2}$ δεκτό

ή

- $\underbrace{\alpha=\tfrac{1}{2}}_{\notin\mathbb{Z}}$ απορρίπτεται