Λύσεις Διαγωνίσματος
Μαθηματικών Γ Λυκείου 18/4/26

ΘΕΜΑ Α

Α3. α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f παρουσιάζει Σ.Κ. για $x=1$: $f''(1)=0$
Η $y=3x-1$ εφάπτεται της C_f για $x=0$

οπότε $f'(0)=3$ και $f(0)=-1$

- $f(0)=-1 \Leftrightarrow \boxed{\gamma=-1}$
- $f'(x)=3x^2+2ax+\beta \xRightarrow{x=0} \boxed{\beta=3}$
- $f''(x)=6x+2a \xRightarrow{x=1} \boxed{\alpha=-3}$

Β2. $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$
$\Rightarrow f$ "1-1"

Έστω $f(x)=y \Leftrightarrow x^3-3x^2+3x-1=y$

$$\Leftrightarrow (x-1)^3=y \Rightarrow \begin{cases} \text{Αν } y\geq 0: & x-1=\sqrt[3]{y} \\ \text{Αν } y<0: & x-1=-\sqrt[3]{-y} \end{cases}$$

οπότε $\begin{cases} x = \sqrt[3]{y} + 1, & y \geq 0 \\ \text{ή} & \\ x = -\sqrt[3]{-y} + 1, & y < 0 \end{cases}$

$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Συνεπώς $\boxed{f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} + 1, & y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} + 1, & y < 0 \end{cases}}$

B3. $A_h = A_{g \circ f^{-1}} = \{x \in A_{f^{-1}} / f^{-1}(x) \in A_g\}$

- $f^{-1}(x) \in A_g \Rightarrow f^{-1}(x) > 1$

  - αν $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{-x} + 1$ για $x < 0$

    $-\sqrt[3]{-x} + 1 \geq 1 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{-x} \geq 0$ Αδύνατο.

  - αν $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ για $x \geq 0$

    $\sqrt[3]{x} + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \geq 0$ που ισχύει.

άρα $A_h = \{x \geq 0 / \sqrt[3]{x} \geq 0\} = [0, +\infty)$.

$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = \ln(f^{-1}(x) - 1)$

$= \ln(\sqrt[3]{x} + 1 - 1) = \ln \sqrt[3]{x} = \frac{1}{3} \ln x$

$$B4.\quad E=\int_1^e \left| h(x)-\frac{1}{3}x \right| dx =$$

$$=\int_1^e \left| \frac{1}{3}\ln x-\frac{1}{3}x \right| dx=\frac{1}{3}\int_1^e |\ln x - x|\,dx$$

$$\underline{\underline{x-\ln x\geq 1}}\ \frac{1}{3}\int_1^e (x-\ln x)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^e (x+1-\underbrace{1-\ln x}_{-(x\ln x)'})\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}+x-x\ln x\right]_1^e=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e^2}{2}\cancel{+e}\cancel{-e}-\frac{1}{2}-1+0\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}\right)=\frac{e^2-3}{6}.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $\int_0^1 f(x)dx = \kappa \in \mathbb{R}$ έτσι θα

ισχύει $2\kappa = f(x) - 2x\ln(x^2+1) + 2\ln 2$

Τότε $\int_0^1 2\kappa dx = \int_0^1 [f(x) - 2x\ln(x^2+1) + 2\ln 2]dx$

$2\kappa[x]_0^1 = \int_0^1 f(x)dx - \int_0^1 2x\ln(x^2+1)dx + 2\ln 2[x]_0^1$

$2\kappa = \kappa - \int_0^1 2x\ln(x^2+1)dx + 2\ln 2$

Θέτω $u = x^2+1$ τότε $du = 2x\,dx$

για $x=0 \Rightarrow u=1$, για $x=1 \Rightarrow u=2$

οπότε $\kappa = -\int_1^2 \ln u\,du + 2\ln 2$

$\Leftrightarrow \kappa = -[u\ln u - u]_1^2 + 2\ln 2$

$\Leftrightarrow \kappa = -(2\ln 2 - 2 - 0 + 1) + 2\ln 2$

$\Leftrightarrow \boxed{\kappa = 1} \longrightarrow \int_0^1 f(x)dx = 1$

έτσι $\boxed{f(x) = 2x\ln(x^2+1) + 2 - 2\ln 2}$

Γ2. $f'(x) = 2\ln(x^2+1) + \dfrac{4x^2}{x^2+1}$

$f''(x) = \dfrac{4x}{x^2+1} + \dfrac{8x(x^2+1) - 8x^3}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x)=\frac{4x\cdot(x^2+1)+8x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x\,(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

x		0	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η $f'(x)$ (η κλίση της f)

Παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$.

Γ3. Ισχύει ότι $f'(x) \geq f'(0)=0$
οπότε $f \nearrow \mathbb{R}$. έτσι έχει το πολύ 1
ρίζα.

$$f(-1)=-2\ln 2+2-2\ln 2=2-4\ln 2$$

$$=\ln e^2-\ln 2^4=\ln\frac{e^2}{16}<0$$

αφού $e^2<3^2=9$ οπότε $\frac{e^2}{16}<1$.

$$f(0)=2-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$$

Η f συνεχής στο $[-1,0]$ με $f(0)f(-1)<0$
από Θ Bolzano $\exists\, x_0\in(-1,0):\ f(x_0)=0$.

Το x_0 μοναδικό αφού $f\nearrow$.

$$A=(-\infty,+\infty)\xrightarrow[\text{συνεχής}]{f\nearrow} f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$

Γ4. από Γ3. $f(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x_0 \ln(x_0^2+1)+2-2\ln 2=0$$

$$\Leftrightarrow x_0 \ln(x_0^2+1)=\ln 2-1$$

$$\Leftrightarrow \ln(x_0^2+1)^{x_0}=\ln\frac{2}{e} \Leftrightarrow \boxed{(x_0^2+1)^{x_0}=\frac{2}{e}}$$

Έτσι η εξίσωση γράφεται:

$$\cancel{e}\cdot\frac{2}{\cancel{e}}=\frac{1}{(f^2(x)+1)^{f(x)}} \Leftrightarrow$$

$$\ln 2=\ln(f^2(x)+1)^{-f(x)} \Leftrightarrow$$

$$\ln 2=-f(x)(f^2(x)+1) \Leftrightarrow$$

$$2\ln 2=-2f(x)(f^2(x)+1) \Leftrightarrow$$

$$0=-2f(x)(f^2(x)+1)-2\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$2=-2f(x)(f^2(x)+1)+2-2\ln 2$$

$$f(1)=f(-f(x)) \overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow} -f(x)=1 \Leftrightarrow$$

$$f(x)=-1$$

Αφού $f(A)=\mathbb{R}$ $\exists x_1\in A: f(x_1)=-1$ το οποίο είναι μοναδικό αφού $f\uparrow$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει ότι $x\ln x - x - (x-e)\left(\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{e} + e + 1\right) \geq 0$

Αν θέσουμε $K(x) = x\ln x - x - (x-e)\cdot\left(\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{e} + e + 1\right) \geq 0$
$x>0$

τότε $K(x) \geq 0$ με $K(e)=0$
$x=e$ εσωτερικό του Π.Ο. όπου η K παραγωγίσιμη.

Από Θ. Fermat $K'(e)=0$.

$K'(x) = \ln x + \cancel{1} - \cancel{1} - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \frac{1}{e} - e - 1$

$\xRightarrow{x=e}$ $0 = \cancel{1} - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \frac{1}{e} - e - \cancel{1}$

$\Leftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{e} - e \Leftrightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1-e^2}{e}}$

Δ2. $\int_{-1}^{1} e^x - \frac{x^3}{6}\,dx = \left[e^x - \frac{x^4}{24}\right]_{-1}^{1} =$

$= e - \frac{1}{24} - \frac{1}{e} + \frac{1}{24} = \frac{e^2-1}{e}$

Συνεπώς $\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\left(f(x) + e^x - \frac{x^3}{6}\right)dx$

$= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1}\left(e^x - \frac{x^3}{6}\right)dx =$

$= \frac{1-e^2}{e} + \frac{e^2-1}{e} = 0$

και αφού $h(x) \geq 0$ (από υπόθεση).

πρέπει $h(x)=0$ στο $[-1,1]$.

Αν $\exists\, x_0 \in [-1,1]$ όπου $h(x_0) \neq 0$

τότε $\int_{-1}^{1} h(x)\,dx > 0 \Rightarrow$ Άτοπο.

Συνεπώς $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{6} - e^x$, $x \in [-1,1]$.

Δ3. $f'(x) = \frac{3x^2}{6} - e^x$, $f''(x) = x - e^x \leq -1 < 0$

αφού $e^x - x \geq 1 \Leftrightarrow x - e^x \leq -1$.

άρα η $f \frown$ $[-1,1]$.

$$2f(k+\tfrac{1}{3}) + f(k) - f(k+\tfrac{2}{3}) =$$

$$f(k+\tfrac{1}{3}) - f(k) - \left(f(k+\tfrac{2}{3}) - f(k+\tfrac{1}{3}) \right) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left[\frac{f(k+\frac{1}{3}) - f(k)}{k+\frac{1}{3} - k} - \frac{f(k+\frac{2}{3}) - f(k+\frac{1}{3})}{k+\frac{2}{3} - (k+\frac{1}{3})} \right]$$

Από ΘΜΤ στο $[k, k+\frac{1}{3}]$ $\exists\, x_1 \in (k, k+\frac{1}{3})$:

$$f'(x_1) = \frac{f(k+\frac{1}{3}) - f(k)}{k+\frac{1}{3} - k}$$

Από ΘΜΤ στο $[k+\frac{1}{3}, k+\frac{2}{3}]$ $\exists\, x_2 \in (k+\frac{1}{3}, k+\frac{2}{3})$:

$$f'(x_2) = \frac{f(k+2/3) - f(k+1/3)}{k+\frac{2}{3} - (k+\frac{1}{3})}$$

Έτσι προκύπτει ότι

$A = \frac{1}{3}\cdot\left(f'(x_1) - f'(x_2)\right)$

$x_1 < x_2 \overset{f\frown}{\underset{f'\downarrow}{\Longleftrightarrow}} f'(x_1) > f'(x_2)$

$\boxed{A > 0}$

Δ4.

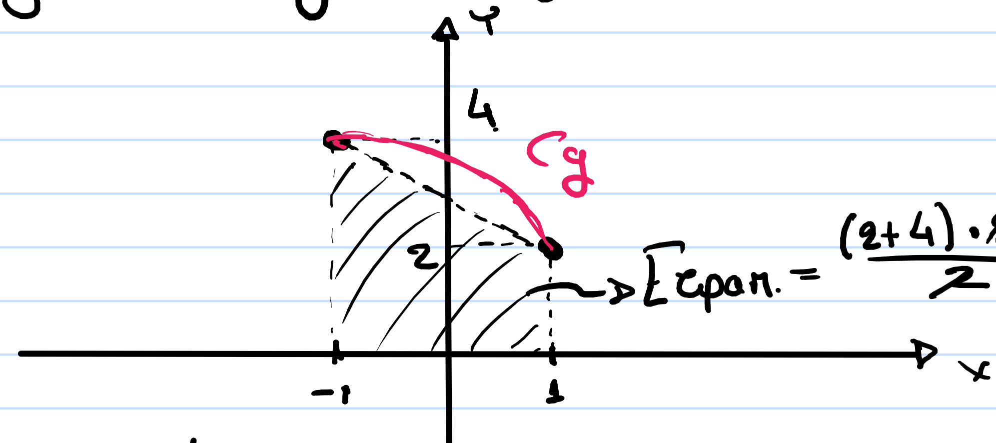
Αρκεί $\int_{-1}^{1}(g(x)+f(x))\,dx > -\frac{e^2+6e+1}{e}$

$\int_{-1}^{1}g(x)\,dx + \int_{-1}^{1}f(x)\,dx > -\frac{e^2+6e+1}{e}$

$\int_{-1}^{1}g(x)\,dx + \frac{1-e^2}{e} > -\frac{e^2+6e+1}{e}$

$$\boxed{\int_{-1}^{1}g(x)\,dx > 6}$$

Η g ↓ και $g(-1)=4$, $g(1)=2$.



$E_{τραπ.} = \frac{(2+4)\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 6$

Άρα $\int_{-1}^{1}g(x)\,dx > E_{τραπ} = 6$.